2. Maxwell方程式とSchrödinger方程式

2-1 Maxwell方程式

電磁場の方程式である

↓

【最も重要な方程式】

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \mathbb{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{r}) & \text{(Gaussの法則)} \\
\nabla \cdot \mathbb{B} = 0 & \text{(単極磁荷がない)} \\
\nabla \times \mathbb{E} + \dfrac{\partial \mathbb{B}}{\partial t} = 0 & \text{(Faradayの法則)} \\
\nabla \times \mathbb{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} & \text{(Ampère-Maxwellの法則)}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\mathbb{E}(\mathbf{r}, t) : \text{電場} \\
\mathbb{B}(\mathbf{r}, t) : \text{磁場}
\end{cases}
$$

これが未知関数

$\rho(\mathbf{r})$ (電荷密度), $\mathbf{j}$ (電流密度) は与えられている

(基本的には電子の運動で決まる)

↕

Schrödinger方程式

• 真空 : $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ の場合

(物質がないという意味)

【真空中での電磁場】

$\rho=0$, $\mathbf{j}=0$ のとき Ampere の式は

$$\nabla\times\mathbf{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

よって

$$\underbrace{\nabla\times(\nabla\times\mathbf{B})}_{\nabla(\nabla\cdot\mathbf{B})-\nabla^2\mathbf{B}\ (\text{べクトル公式})}=\frac{1}{c^2}\nabla\times\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}$$

$\left(\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right.$ Faradayの法則より$\left.\right)$

また $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$ を用いると

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\mathbf{B}=0}$$

となる.

これは波の方程式に対応している.

⇓

電磁波の存在を示唆

【自由場】

$$
\begin{cases}
\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbb{B} = 0 & (\text{Maxwell方程式}) \\
\left(i\hbar\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\right) \psi = 0 & (\text{Schrödinger方程式})
\end{cases}
$$

両方とも 場に対する方程式

Maxwell方程式は 第1量子化を 知っていた