4-2 非定常状態の摂動論

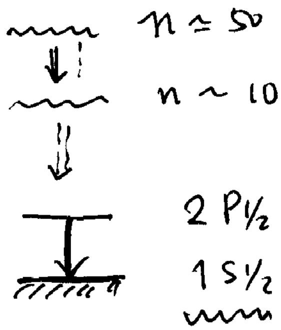
【遷移確率の計算】

実験：　電子が陽子につかまる

（$n \fallingdotseq 50$ と考えられる）

↓

電磁波を放出して遷移する



$1S_{1/2}$状態になる

・光放出のメカニズムは？

摂動項 Hamiltonian H' による

遷移となる

$$\left(H' = -\frac{e}{m_e c} A \cdot \hat{p} \right)$$

【非定常状態の摂動論】

$$\boxed{H = H_0 + H'(t)}$$ の系を考える

H' は時間依存
→ 光の放出

(a) Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (H_0 + H'(t))\psi$$

ここで

$$\boxed{\psi(t) = \sum_n a_n(t)\, u_n(r)\, e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}}$$

と展開する.

但し $u_n(r)$ は H_0 の固有関数
完全規格直交系を作る

$$\begin{cases} H_0 u_n = E_n u_n \\ \langle u_n | u_m \rangle = \delta_{nm} \\ \sum_n |u_n\rangle\langle u_n| = 1 \end{cases}$$

- $\psi(t)$ を Schrödinger 方程式に代入

$$\sum_n i\hbar\left[\frac{da_n}{dt}u_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}-\frac{i}{\hbar}E_n a_n u_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\right]$$

$$=\sum_n\left(E_n+H'(t)\right)a_n u_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}$$

左から u_m^* をかけて積分する.(内積をとる)

よって

$$\boxed{\frac{d a_m(t)}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\sum_n H'_{mn}(t)\, e^{i\omega_{mn}t}\, a_n(t)}$$

但し
$$\begin{cases} H'_{mn}\equiv\langle u_m|H'|u_n\rangle \\ \omega_{mn}\equiv\frac{1}{\hbar}(E_m-E_n)\end{cases}$$
とした.

(b) 解法

この式の一般解:

$$\boxed{a_m(t)=a_m(0)+\frac{1}{i\hbar}\sum_{n\neq m}\int_0^t H'_{mn}(t')e^{i\omega_{mn}t'}a_n(t')dt'}$$

と書ける. 代入すればわかるか.

- $a_m(0)$: $t=0$ のときの値
  初期条件を与える
- 逐次近似法 : iteration method
  - まず $a_m(0)$ が大きいとして第2項を無視する.
  - 次に第2項の $a_n(t')$ に $a_m(0)$ を代入する.

  これを繰り返してゆく

(c) 1次までの解 : 0次の時 $(t=0)$ で

$$a_m^{(0)}(0) = \delta_{mk}$$

k-状態に最初いたとする

k-状態以外はすべて

$$a_m^{(0)}(0) = 0 \quad (m \neq k)$$

- 1次での k-状態以外の $a_m^{(1)}$

$$\boxed{a_m^{(1)} = \frac{1}{i\hbar}\int_0^t H'_{mn}(t')e^{i\omega_{mk}t'}dt'} \quad (m \neq k)$$

(a) 摂動 Hamiltonian H'

$$\underline{H' = -\frac{e}{m_e c} \mathbb{A} \cdot \mathbb{p}}$$ で与えられる

ここでベクトルポテンシャル $\mathbb{A}$ を量子化する

$$\boxed{\hat{\mathbb{A}} = \sum_{\mathbb{p},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_p}} \epsilon_{\mathbb{p},\lambda} \left[C_{\mathbb{p},\lambda} e^{i\omega_p t - i\mathbb{p}\cdot\mathbb{r}} + C^{+}_{\mathbb{p},\lambda} e^{-i\omega_p t + i\mathbb{p}\cdot\mathbb{r}} \right]}$$

但し $\begin{cases} \omega_p = |\mathbb{p}| \\ \epsilon_{\mathbb{p},\lambda} : \text{偏極ベクトル} \end{cases}$

(2個の成分をもつ)

量子化：

$$\boxed{\left[C_{\mathbb{p},\lambda} , C^{+}_{\mathbb{p}',\lambda'} \right] = \delta_{\mathbb{p}\mathbb{p}'} \delta_{\lambda\lambda'}}$$

とする

それ以外の交換関係は

$$\begin{cases} \left[C_{\mathbb{p},\lambda} , C_{\mathbb{p}',\lambda'} \right] = 0 \\ \left[C^{+}_{\mathbb{p},\lambda} \ C^{+}_{\mathbb{p}',\lambda'} \right] = 0 \end{cases}$$ とする