4-3 遷移確率とフェルミの黄金律

単位時間に k-状態から m-状態へ遷移する確率 W

$$\boxed{W = \frac{1}{T} \sum_{n_m} \left| a_m^{(1)}(T) \right|^2}$$

(光の終状態の和)

ここで

$$a_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t H'_{mk}(t') e^{i\omega_{mk} t'} dt'$$

$$H' = -\frac{e}{m_e c} \mathbb{A} \cdot \mathbb{P} \quad \text{より}$$

$$H'_{mk} = -\frac{e}{m_e c} \langle u_m | \hat{\mathbb{P}} \cdot \epsilon | u_k \rangle \frac{1}{\sqrt{2V\omega_p}} e^{-i\omega_p t}$$

$$\therefore \boxed{H'_{mk} \equiv V_{mk} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_p}} e^{-i\omega_p t}}$$

$$V_{mk} \equiv -\frac{e}{m_e c} \langle u_m | \hat{\mathbb{P}} \cdot \epsilon | u_k \rangle$$

ここで

$$\underbrace{\sum_{n_m} \Rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\int d^3p}$$ を用いると

$$\boxed{W = \frac{1}{T}\cdot\frac{V}{(2\pi)^3}\cdot\int\frac{d^3p}{\hbar^2}\left|\int_0^T \frac{1}{\sqrt{2V\omega_p}}V_{mk}\,e^{i(\omega_{mk}-\omega_p)t'}dt'\right|^2}$$

（後に $T\to\infty$ とする）

まず

$$I \equiv \left|\int_0^T e^{i(\omega_{mk}-\omega_p)t'}dt'\right|^2$$ の計算

ここで $\displaystyle\int_0^T e^{i(\omega_{mk}-\omega_p)t'}dt = 2\pi\,\delta(\omega_{mk}-\omega_p)$
$(T\to\infty)$

なので、もう1つの積分は

$$\int_0^T e^{i(\omega_{mk}-\omega_p)t'}dt' = T$$ となる

よって

$$\boxed{I = 2\pi T\,\delta(\omega_{mk}-\omega_p)}$$ と求まった

これより

$$W = \frac{1}{T}\frac{V}{(2\pi)^3}\frac{1}{\hbar^2}\cdot 2\pi T\cdot\frac{1}{2V}\cdot\int\frac{|V_{mk}|^2}{\omega_p}\delta(\omega_{mk}-\omega_p)\,d^3p$$

となっている。

ここで $\begin{cases} d^3p = 4\pi p^2 dp \\ \omega_p = p \end{cases}$ を用いると

$$\boxed{W = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{mk}|^2 \rho_p} \quad (\text{黄金律})$$

(Fermi の Golden rule) となる。

(但し $\rho_p \equiv \frac{\hbar p}{4\pi^2}$)

- 電子の状態が k から m への遷移確率
- $(E_k - E_m)$ のエネルギーの光が放出される