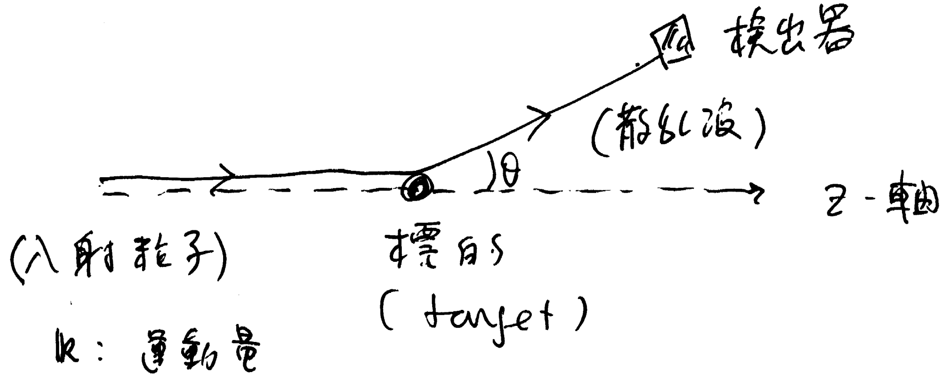
6. 量子力学の散乱理論

6-1 ポテンシャル散乱

$\begin{pmatrix} \hbar = 1 \\ c = 1 \end{pmatrix}$



- 時間によらない散乱理論の定式化
- 衝突理論：基本的には時間依存に取扱うべきである

$$\boxed{\text{波束による理論}}$$

$$\Downarrow$$

散乱T-行列と同じである

(証明はむつかしい!!)

- Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V\psi = E\psi$$

(potential 散乱)

散乱問題は 固有値問題 ではない!!

E は与えられている

(a) 入射波: $V(r)=0$ のとき

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi \qquad (E>0)$$

$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ とおくと

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\psi_{in}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}$$

が 入射粒子の 波動関数

($\frac{1}{\sqrt{V}}$ は 1 としてある)

• 入射波のフラックス：

$$j_{in} = \frac{1}{2mi}\left[\psi_{in}^{*}\nabla\psi_{in} - (\nabla\psi_{in}^{*})\psi_{in}\right]$$

$$= \frac{1}{2mi}\left[e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, i\mathbf{k}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - (-i\mathbf{k})\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right]$$

$$\therefore \boxed{j_{in} = \frac{\mathbf{k}}{m}} \rightarrow \left(j_{in} = \frac{k}{m}\right)$$

z-方向とする

• 入射波の部分波展開：

$$\psi_{in}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr\cos\theta}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} i^{l}(2l+1)\, \hat{j}_{l}(kr)\, P_{l}(\cos\theta)$$

$r \to \infty$ のとき

$$\hat{j}_{l}(kr) \simeq \frac{1}{kr}\cos\left(kr - \frac{1}{2}(l+1)\pi\right)$$

$$\simeq \frac{1}{2kr}(-i)^{l+1}\left(e^{ikr} + (-)^{l+1}e^{-ikr}\right)$$

従って　$r\to\infty$ では

$$\psi_{in}(\mathbf{r}) \simeq \sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{2ik}\left(\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{(-)^{l+1}}{r}e^{-ikr}\right)P_{l}(\cos\theta)$$

（外向球面波）

(b) 散乱波

$$\boxed{\psi_r(r) \equiv f(\theta)\,\frac{e^{ikr}}{r}}$$

と書ける.

(証明はあとでする)

$f(\theta)$: 散乱振幅という

(注: $\frac{e^{-ikr}}{r}$ は散乱波ではない)

◎ 散乱波のフラックス:

$$\hat{j}_r = \frac{1}{2mi}\left(\psi_r^*\frac{\partial\psi_r}{\partial r} - \left(\frac{\partial\psi_r^*}{\partial r}\right)\psi_r\right)$$

$$= \frac{1}{2mi}\left\{\frac{e^{-ikr}}{r}\left(ik\frac{e^{ikr}}{r} - \frac{1}{r^2}e^{ikr}\right)|f(\theta)|^2 - \left(-ik\frac{e^{-ikr}}{r} - \frac{1}{r^2}e^{-ikr}\right)\frac{e^{ikr}}{r}|f(\theta)|^2\right\}$$

$$= \frac{k}{mr^2}|f(\theta)|^2$$

$$\therefore\ \boxed{\hat{j}_r = \frac{k}{mr^2}|f(\theta)|^2}$$

No.

Date

(c) 散乱断面積

$$d\sigma \equiv \frac{r^2 d\Omega \text{ 領域の散乱波フラックス}}{\text{入射フラックス}}$$

$$\therefore \quad d\sigma = \frac{1}{\frac{k}{m}}\left(\hat{j}_r \, r^2 d\Omega\right)$$

$$= \frac{1}{\frac{k}{m}} \frac{k}{mr^2} |f(\theta)|^2 \, r^2 d\Omega$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2}$$

微分断面積という

⇕

($f(\theta)$ が面積の次元をもつので)