# 6-3 Born 近似

散乱振幅は

$$\boxed{f(\mathbb{k},\mathbb{k}') = -\frac{m}{2\pi}\int e^{-i\mathbb{k}'\cdot\mathbb{r}'} V(\mathbb{r}')\, \psi_{\mathbb{k}}(\mathbb{r}')\, d^3r'}$$

$(\mathbb{k}' \equiv k\hat{\mathbb{r}})$ であった。

しかし右辺の $\underbrace{\psi_{\mathbb{k}}(\mathbb{r})}$ は Schrödinger 方程式を解いて初めてわかる量

◎ Born 近似

右辺にあらわれる $\psi_{\mathbb{k}}(\mathbb{r})$ を

$$\underbrace{\psi_{\mathbb{k}}(\mathbb{r}) \simeq e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}}$$ と近似する

このとき

$$\boxed{f(\mathbb{k},\mathbb{k}') \simeq -\frac{m}{2\pi}\int e^{-i\mathbb{k}'\cdot\mathbb{r}'} V(\mathbb{r}')\, e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}'}\, d^3r'}$$

となる。これを Born 近似による散乱振幅という。

# 【Rutherford散乱の場合】

Coulombポテンシャルは

$$\underline{V(r) = \frac{\alpha}{r}}$$ と書ける

この時、Born近似での散乱振幅は

$$\underline{f(\mathbf{k},\mathbf{k}') \simeq \frac{m\alpha}{2\pi}\int \frac{e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}}}{r}d^3r}$$

となる。

ここで運動量移行 $\mathbf{q}$ を

$$\boxed{\mathbf{q} \equiv \mathbf{k}-\mathbf{k}'}$$ と定義する

この時

$$f(\mathbf{q}) \simeq \frac{m\alpha}{2\pi}\int \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{r}d^3r = \frac{m\alpha}{2\pi}2\pi\int e^{iqrt}\,r\,dr\,dt$$

$$(t = \cos\theta)$$

$$\underline{-1 \leq t \leq 1}$$

よって

$$\underline{f(\mathbf{q}) \simeq \frac{2m\alpha}{q}\int_0^\infty \sin qr\,dr}$$

$$f(q) = \frac{2m\alpha}{q}\int_0^\infty \sin qr \, dr$$ の計算法.

$$\sin qr = \mathrm{Im}\, e^{iqr} = \mathrm{Im}\, e^{i(q+i\varepsilon)r}$$

として あとで $\varepsilon \to 0$ とする

よって

$$f(q) = \frac{2m\alpha}{q}\,\mathrm{Im}\left[\frac{e^{iqr-\varepsilon r}}{i(q+i\varepsilon)}\right]_0^\infty = \frac{2m\alpha}{q^2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(q)|^2 = \frac{4m^2\alpha^2}{q^4} = \frac{\alpha^2}{(4E)^2}\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}$$

但し
$$\begin{cases} q^2 = |\mathbf{k}-\mathbf{k}'|^2 = 4k^2\sin^2\frac{\theta}{2} \\ E = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} \end{cases}$$

{この微分断面積は厳密に Schrödinger 方程式を解いて求めたもの と (αとaが) 同じである}