7-2 Dirac方程式の導出

Dirac による因数分解法 $(\hbar=1,\ c=1)$

$$(\hat{E}^2-\hat{p}^2-m^2)\psi=0$$

(但し $\hat{E}=i\frac{\partial}{\partial t}$, $\hat{p}=-i\nabla$)

を因数分解して $\hat{E}$ の1次式を導く.

(解)

$$(\hat{E}^2-\hat{p}^2-m^2)\psi$$

$$=(\hat{E}-\hat{p}\cdot\alpha-m\beta)(\hat{E}+\hat{p}\alpha+m\beta)\psi=0$$

とする. 但し α, β は行列である.

$$\alpha=\begin{pmatrix}0 & \sigma\\ \sigma & 0\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$ とする.

ここで $\sigma=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

(証) $(\hat{E} - \hat{p}\cdot\alpha - m\beta)(\hat{E} + \hat{p}\cdot\alpha + m\beta)$

$$= \hat{E}^2 + \hat{E}(\hat{p}\cdot\alpha + m\beta) - (\hat{p}\cdot\alpha + m\beta)\hat{E} - (\hat{p}\cdot\alpha + m\beta)(\hat{p}\cdot\alpha + m\beta)$$

(a) $\hat{E}$ と $\hat{p}\cdot\alpha + m\beta$ は交換する.

(b) $$(\hat{p}\cdot\alpha)(\hat{p}\cdot\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{p}\cdot\sigma \\ \hat{p}\cdot\sigma & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \hat{p}\cdot\sigma \\ \hat{p}\cdot\sigma & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\hat{p}\cdot\sigma)(\hat{p}\cdot\sigma) & 0 \\ 0 & (\hat{p}\cdot\sigma)(\hat{p}\cdot\sigma) \end{pmatrix}$$

$$= \hat{p}^2$$

但し $(A\cdot\sigma)(B\cdot\sigma) = A\cdot B + i\sigma\cdot(A\times B)$ を用いた.

(c) $\alpha\cdot\beta + \beta\alpha = 0$

これらより

$$(\hat{E}^2 - \hat{p}^2 - m^2)\psi = (\hat{E} - \hat{p}\cdot\alpha - m\beta)(\hat{E} + \hat{p}\cdot\alpha + m\beta)\psi$$

$$= 0$$

が示された.

【Dirac方程式】（自由粒子の時）

$$\left(\hat{E} - \hat{\mathbb{P}}\cdot\alpha - m\beta\right)\psi = 0$$

$$\therefore \begin{cases} i\dfrac{\partial\psi}{\partial t} = \left(-i\nabla\cdot\alpha + m\beta\right)\psi \\ \psi = \begin{pmatrix}\psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4\end{pmatrix} \end{cases}$$

Dirac方程式という

→ 4個の成分をもつ

↑スピノルという

● Dirac の Hamiltonian

$(\hat{\mathbb{P}} = -i\nabla)$

$$\hat{H} = \hat{\mathbb{P}}\cdot\alpha + m\beta$$

$$\boxed{\hat{H} = \begin{pmatrix} m & \hat{\mathbb{P}}\cdot\sigma \\ \hat{\mathbb{P}}\cdot\sigma & -m \end{pmatrix}}$$

となっている.

【自由粒子解】

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + i\nabla\cdot\alpha - m\beta \right)\psi(\mathbf{r},t) = 0$$

ここで $\underline{\psi(\mathbf{r},t) = e^{-iEt + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}}$

の形に仮定すると

$$\left(E - \mathbf{p}\cdot\alpha - m\beta \right)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

行列で書くと

$$\begin{pmatrix} E - m & -\mathbf{p}\cdot\sigma \\ -\mathbf{p}\cdot\sigma & E + m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0$$

この時、固有値 E は

$$\det\begin{pmatrix} E - m & -\mathbf{p}\cdot\sigma \\ -\mathbf{p}\cdot\sigma & E + m \end{pmatrix} = 0$$ で決まる.

$$\therefore\ E^2 - m^2 - \mathbf{p}^2 = 0 \qquad \because\ (\mathbf{p}\cdot\sigma)^2 = \mathbf{p}^2$$

$$\therefore\ \boxed{E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}}$$

(a) 正エネルギー解 : $E = \sqrt{p^2 + m^2}$

$$\psi^{(+)} = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \cdot p}{E+m} \chi_s \end{pmatrix} e^{-iEt + ip \cdot x}$$

χ_s : $\begin{cases} \text{spin 波動関数} \\ \chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

(b) 負エネルギー解 : $E = -\sqrt{p^2 + m^2}$

$$\psi^{(-)} = \sqrt{\frac{|E|+m}{2|E|}} \begin{pmatrix} -\frac{\sigma \cdot p}{|E|+m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix} e^{-i|E|t + ip \cdot x}$$

【負エネルギー状態の解釈】

Dirac方程式は固有値として

負エネルギー解をもつ

これは物理的である

[Diracの解釈]

- Hole理論

  (a) 電子にはPauli原理が働く

  (b) 物理的真空：負エネルギー状態は完全につまっている

- 負エネルギー状態がすべていっぱい

↓

{ 正エネルギー状態から負エネルギー状態に遷移できない!! }

↓

$\boxed{\text{真空は安定}}$

【反粒子】

負エネルギー状態に穴(hole)をあける

⟹ 反粒子(陽電子)として観測