7-4 Dirac方程式の非相対論極限

水素型原子の Dirac 方程式

（すべて 1体問題と仮定する）

$\Downarrow$ 相対論は 2体問題はとけない!!

$$\boxed{\hat{H} = \alpha\cdot(\mathbb{P} - e\mathbb{A}) + m\beta - \frac{Ze^2}{r}}$$

$$\begin{cases} \mathbb{B} = \nabla\times\mathbb{A} \\ \mathbb{E} = -\nabla A_0 - \dfrac{\partial\mathbb{A}}{\partial t} \end{cases}$$

- 物質の中にいる電子は　非相対論的

$$\Updownarrow$$

$$|\mathbb{P}| \ll m$$

- Foldy-Wouthuysen 変換を行う

$$\begin{cases} \text{unitary 変換} \\ \dfrac{1}{m} \text{ の展開} \Rightarrow \text{計算はかなり大変} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{H}_{NR} = m &+ \frac{1}{2m}(\hat{\mathbb{P}} - e\mathbb{A})^2 - \frac{Ze^2}{r} - \frac{\hat{\mathbb{P}}^4}{8m^3} \\ &- \frac{e}{2m}\,\sigma\cdot\mathbb{B} + \frac{e}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}(\sigma\cdot\mathbb{L}) + \cdots \end{aligned}}$$

$$\left(V = -\frac{Ze}{r}\right)$$

◎ Zeeman 効果（スピン部分のみ）

$$\boxed{H' = -\frac{e\hbar}{2mc}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbb{B}}$$

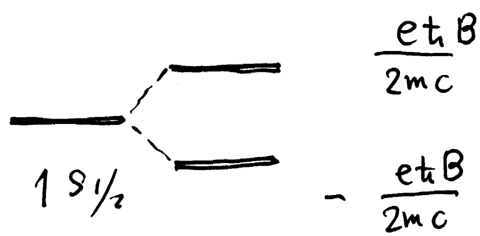
Zeeman 効果の Hamiltonian という

$\mathbb{B} = (0, 0, B)$ とすると

$$H' = -\frac{e\hbar B}{2mc}\cdot\sigma_z$$

◎ 水素原子に磁場をかけると

$1S_{1/2}$（基底状態）が分裂する



（Zeeman 分裂）

◎ 磁気量子数 ： χ_{m_s}

$\Updownarrow$　　　$\Downarrow$

（磁場による分裂）　$\Delta E = -\frac{e\hbar B}{mc}\cdot m_s$

◎ Zeeman効果 Hamiltonianの導出

非相対論的 Hamiltonian

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(\sigma\cdot(\hat{\mathbb{P}} - e\mathbb{A})\right)\left(\sigma\cdot(\hat{\mathbb{P}} - e\mathbb{A})\right)$$

数学の公式：

$$(\sigma\cdot\mathbb{A})(\sigma\cdot\mathbb{B}) = \mathbb{A}\cdot\mathbb{B} + i\sigma\cdot\mathbb{A}\times\mathbb{B}$$

より

$$\left(\sigma\cdot(\hat{\mathbb{P}} - e\mathbb{A})\right)\left(\sigma\cdot(\hat{\mathbb{P}} - e\mathbb{A})\right)$$

$$= (\hat{\mathbb{P}} - e\mathbb{A})^2 + i\sigma\cdot\left[(\hat{\mathbb{P}} - e\mathbb{A})\times(\hat{\mathbb{P}} - e\mathbb{A})\right]$$

$$\qquad = -e\hat{\mathbb{P}}\times\mathbb{A} - e\mathbb{A}\times\mathbb{P}$$

$$\qquad = ie\nabla\times\mathbb{B} = ie\mathbb{B}$$

よって

$$\boxed{H_0 = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbb{P}} - e\mathbb{A})^2 - \frac{e}{2m}\sigma\cdot\mathbb{B}}$$

となる

◎ スピン・軌道相互作用

スピン軌道力

$$\boxed{H'_{so} = \frac{Ze^2}{2m^2 r^3}(\mathbb{S}\cdot\mathbb{L})}$$

Dirac 方程式の保存量は $\mathbb{J}$

よって $\mathbb{J}^2 = (\mathbb{L}+\mathbb{S})^2 = \mathbb{L}^2 + \mathbb{S}^2 + 2\mathbb{S}\cdot\mathbb{L}$

$$\therefore \quad \mathbb{S}\cdot\mathbb{L} = \frac{1}{2}\left[J(J+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right]$$

これより

$$\Delta E_{s.o.} = \langle JJ \,|\, H'_{so} \,|\, JJ \rangle$$

$$\therefore \Delta E_{s.o.} = \frac{Ze^2}{4m^2}\left[J(J+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right]\left\langle \frac{1}{r^3}\right\rangle_{nl}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\left\langle \frac{1}{r^3}\right\rangle_{nl} = \frac{Z^3}{a_0^3\, n^3\, l(l+1)(l+\frac{1}{2})} \\ &a_0 = \frac{1}{m\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{137} \end{aligned}\right.$$ より

$$\boxed{\Delta E_{s.o.}(2P_{3/2} - 2P_{1/2}) = \frac{1}{32} m\alpha^4}$$ となる。