

# 7-5 重力場の Dirac 方程式

重力ポテンシャル

$$V(r) = -\frac{GMm}{r}$$

である。

Dirac 方程式は

$$\left[ \hat{p} \cdot \alpha + \left( m - \frac{GMm}{r} \right) \beta \right] \Psi = E \Psi$$

である事が示される。

$$\hat{H} = \hat{p} \cdot \alpha + m \beta - \frac{GMm}{r} \beta$$



Foldy-Wouthuysen 変換

$$\hat{H}_{NR} = m + \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{GMm}{r} + \frac{1}{2m^2} \frac{GMm}{r} \hat{p}^2 + \dots$$

と求まる。

この時、新しい重力ポテンシャルは

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left( \frac{GMm}{r} \right)^2$$

と求まる。

① 付加重力ポテンシャル下の Newton 方程式

重力ポテンシャル

$$V(r) = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2mc^2} \left( \frac{GMm}{r} \right)^2$$

↑  
相対論的効果

Newton 方程式:

$$m\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2} + \frac{l^2}{mr^3} + \frac{G^2 M^2 m}{c^2 r^3}$$

$$l = mr^2 \dot{\varphi} \quad : \quad \text{保存量}$$

この方程式は  $\varphi$  について解いて

$$\begin{cases} r = \frac{A}{1 + \varepsilon \cos\left(\frac{L}{l} \varphi\right)} \\ A = \frac{L^2}{GMm^2} \end{cases}$$

223

$$\text{但し} \quad \begin{cases} \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{m(GMm)^2}} \\ L^2 = l^2 + \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2} \end{cases}$$

〔物理量は周期  $T$ 〕

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{mr^2}$$

$$\therefore \frac{l}{m} \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = A^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos(\frac{l}{\ell} \varphi))^2}$$

$$\varepsilon \ll 1, \quad \gamma \equiv \frac{G^2 M^2}{c^2 R^4 \omega^2} \ll 1 \quad \varepsilon \approx 17$$

$$\omega T \cong 2\pi [1 + (2 - \varepsilon) \gamma]$$

と約3

周期  $\Delta T$  として

$$\frac{\Delta T}{T} \cong (2 - \varepsilon) \gamma$$

と約3

# 【観測量の比較】

87

## 1. 水星の近日点

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{観測値} : \left( \frac{\Delta T}{T} \right)_{\text{exp}} \simeq 7.8 \times 10^{-8} \\ \text{理論値} : \left( \frac{\Delta T}{T} \right)_{\text{theo}} \simeq 4.8 \times 10^{-8} \end{array} \right.$$

## 2. GPS衛星の進み

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{観測値} : \left( \frac{\Delta T}{T} \right)_{\text{exp}} \simeq 4.5 \times 10^{-10} \\ \text{理論値} : \left( \frac{\Delta T}{T} \right)_{\text{theo}} \simeq 3.4 \times 10^{-10} \end{array} \right.$$

## 3. 地球公転の進み (333秒)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{観測値} : (\Delta T)_{\text{exp}} \simeq 0.63 \text{ 秒/年} \\ \text{理論値} : (\Delta T)_{\text{theo}} \simeq 0.62 \text{ 秒/年} \end{array} \right.$$