

量子力学 III 試験問題 (2013.12.3)

学生番号 _____ 氏名 _____

1. ${}^4\text{He}^-$ 原子は正電荷 ($2e$) を持った原子核の回りを 2 個の電子が回っている系である．この系のハミルトニアンは $H = H_1 + H_2 + H_{12}$

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r_1^2} \frac{d}{dr_1} r_1^2 \frac{d}{dr_1} \right) - \frac{2e^2}{r_1}, \quad H_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{r_2^2} \frac{d}{dr_2} r_2^2 \frac{d}{dr_2} \right) - \frac{2e^2}{r_2}, \quad H_{12} = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}$$

で与えられる．この 2 体の系の基底状態のエネルギーを近似的に求めたい．

- (a) Pauli 原理によれば，フェルミオンは 1 個の状態に 1 個のフェルミオンしか入れない．しかし，2 個の電子は共に $1s$ -状態に入っている．これはなぜだと思うか？
- (b) H_{12} の項を無視する時，基底状態のエネルギー $E^{(0)}$ を求めよ．これは，何 eV であるか？
- (c) 変分波動関数として $\Psi_0(r_1, r_2) = \phi(r_1)\phi(r_2)$ ， 但し， $\phi(r) = Ne^{-\alpha r}$ とする． α を変分パラメータにした時，全系 H の最低エネルギーはいくらであるか？

(注) $\langle \phi(r_1)\phi(r_2) | \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} | \phi(r_1)\phi(r_2) \rangle = \frac{40\pi^2 N^4 e^2}{2^6 \alpha^5}$ を使ってよい．

2. 変分波動関数 ψ_v を厳密な波動関数 ψ_0 から $\psi_v = \psi_0 + \varepsilon\psi_1$ と微量 ε だけズレていたとする．この時，変分波動関数によるエネルギー $E = \frac{\langle \psi_v | H | \psi_v \rangle}{\langle \psi_v | \psi_v \rangle}$ は厳密なエネルギー E_0 から ε^2 のズレとなる事を示せ．ここで $\langle \psi_0 | \psi_1 \rangle = 0$ と仮定してよい．また， $H|\psi_0\rangle = E_0|\psi_0\rangle$ である．