No.
Date

1-6 不確定性関係

(a) 粒子の位置の測定

⇓ 期待値が観測量

$$\begin{cases} \langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 x\, dx \\ \langle x^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 x^2\, dx \end{cases}$$

• 簡単のため　$\psi(x)$ は偶関数であるとする

i.e　$\boxed{\psi(x) = \psi(-x)}$

このとき　$\underline{\underline{\langle x \rangle = 0}}$

(証) $\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 x\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(-x)|^2 (-x)\, dx$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 x\, dx = -\langle x \rangle$$

$\therefore \boxed{\langle x \rangle = 0}$

(b) 運動量の測定 $\left(\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)$

$$\begin{cases} \langle \hat{p} \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\, dx \\ \langle \hat{p}^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \psi(x)\, dx \end{cases}$$

$\langle \hat{p} \rangle = 0$ でもある

[不確定性関係式]

$$\boxed{\sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle \hat{p}^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}}$$

が常に成立する.

一般的には

$$\begin{cases} \Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \\ \Delta p \equiv \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} \end{cases}$$ とするとき

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$$ ← 不確定性関係式

Δx はズレに対応している

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2$$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad //$$

- 不確定性関係式は

$$[x, \hat{p}] = i\hbar \quad \text{である限り}$$

常に成立する。

以下の証明では

$$\langle x \rangle = 0$$

$$\langle \hat{p} \rangle = 0 \quad \text{のときを考える。}$$

[不確定性関係式の証明]

量子化の式は $[x, \hat{p}] = i\hbar$

$\therefore \quad \underline{x\hat{p} - \hat{p}x = i\hbar}$

今 $\left| \hat{p}t + ix \right|^2 \geq 0$ である。

ここで t は任意の実数。

上式を変形すると

$$(\hat{p}t + ix)^* (\hat{p}t + ix) \geq 0$$

$$(\hat{p}t - ix)(\hat{p}t + ix) \geq 0$$

（但し $\hat{p}, x$ はエルミート、$\hat{p}^\dagger = \hat{p}, \; x^\dagger = x$）

よって $\hat{p}^2 t^2 + i[\hat{p}, x]t + x^2 \geq 0$

$$\therefore \boxed{\hat{p}^2 t^2 + \hbar t + x^2 \geq 0}$$

ここで $\psi(x)$ による期待値をとると

$$\boxed{\langle \hat{p}^2 \rangle t^2 + \hbar t + \langle x^2 \rangle \geq 0}$$

この式が任意の t (実数) に対して成立する

$\langle \hat{p}^2 \rangle t^2 + \hbar t + \langle x^2 \rangle \geqq 0$ が任意の実数 t で成立する

← 判別式が負

$$D = \hbar^2 - 4\langle \hat{p}^2 \rangle \langle x^2 \rangle \leqq 0$$

$$\therefore \boxed{\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle} \geqq \frac{\hbar}{2}}$$

よって証明された

（注） これは基本的には Schwartz の不等式と同じ

$$|a| \cdot |b| \geqq |(a \cdot b)|$$

（証明） $(at + b)^2 \geqq 0$ （t は実数）

$$\therefore t^2 a^2 + 2(a \cdot b)t + b^2 \geqq 0$$

任意の t に対して成立する ⇒ 判別式が負

$$D = (a \cdot b)^2 - |a|^2 |b|^2 \leqq 0$$

$$\therefore \underline{|a| \cdot |b| \geqq |(a \cdot b)|}$$