2. オペレータと固有関数

2-1 オペレータ

オペレータ（演算子）とは何か？

(a) 微分演算子　$\frac{d}{dx}$

(b) 行列の演算　A. B

⋮

- 微分演算の場合：　微分する関数 $f(x)$ が必要

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x)}$$

- 行列の場合：

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とした場合

対応するベクトル（又は行列）が必要

ベクトル $\phi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とした時

$$A\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix}$$

No.
Date

[固有値方程式]

オペレータ $\hat{A}$ に対して

$$\boxed{\hat{A}u = au}$$

が成立する時

固有値方程式 という

- u を $\hat{A}$ の固有関数
- a をその固有値

という

[実例]

1. オペレータ $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

状態関数 $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする

(i) $\sigma_z u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u$

$\therefore \sigma_z u = u$

u は σ_z の固有関数

固有値は 1

(ii) $\sigma_z v = -v$, v は σ_z の固有関数

固有値は -1

No.
Date

2、 オペレータ $\hat{P}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ の時：

◎ 状態関数として $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$ とする

この時： $\hat{P}_x \psi(x) = (-i\hbar)\frac{1}{\sqrt{L}}(ik) e^{ikx} = \hbar k \psi(x)$

よって $\psi(x)$ は $\hat{P}_x$ の固有関数

固有値は $\underline{\underline{\hbar k}}$

◎ 状態関数として $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin kx$ をとる

この時： $\hat{P}_x \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} (-i\hbar) k \cos kx \neq \psi(x)$

よって この $\psi(x)$ は $\hat{P}_x$ の固有関数には

なっていない!!

3. オペレータ $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

状態関数 $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする

この時： $\sigma_y u = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} = i v$

$\sigma_y v = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} = -i u$

よって u, v は σ_y の固有関数には

なっていない!!