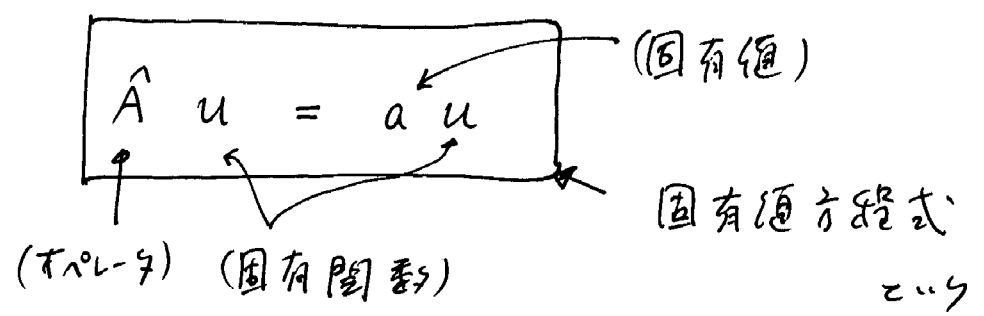


2-2 固有値と固有関数



1. $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ a 固有値と固有関数を求める

(\hat{p} は運動量演算子)

$\hat{p} \psi(x) = a \psi(x)$ a 固有値方程式

∴ $\frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{ia}{\hbar} \psi(x) = 0$

∴ a は 微分方程式から解ける

$\psi(x) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar} a x}$ (A_0 は定数)

- $\psi(x)$ に何らかの条件をつける必要がある
- a が何なるかはわからない!!

(例) 境界条件 (周期性的境界条件) をつける

$\psi(x) = \psi(x+L)$

○ 同様の境界条件 :

粒子を箱の中に入れた。

両端の $\psi(x)$ が等しい

と仮定 ($a=0$ に対応)。

自由粒子の場合 必ずしも必要

$$\psi(x) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar} a x} \quad a \neq 0$$

$$\psi(x) = \psi(x+L) \quad (\text{仮定})$$

$$A_0 e^{\frac{i}{\hbar} a x} = A_0 e^{\frac{i}{\hbar} a (x+L)} \quad \text{となり}$$

可成り

$$e^{\frac{i}{\hbar} a L} = 1$$

より、

$$a = \frac{2\pi\hbar}{L} n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

となり、 \hbar の A_0 は決まらぬ。

2. $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ q 固有値 = 固有関数

$$\begin{cases} u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \\ u^\dagger = (a, b) \end{cases}$$

$$\text{つまり } u^\dagger u = 1 \text{ と仮定する}$$

↓

$$\therefore \underline{a^2 + b^2 = 1}$$

• 固有値方程式' (a)

$$\sigma_x u = \lambda u$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

つまり a, b の non-zero の解が存在する

↓

$$\text{行列式} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \underline{\lambda^2 = 1}$$

$$\boxed{\lambda = \pm 1}$$

固有値 (a) ± 1

→ 波動関数 u (a) ?

(i) $\lambda = 1$ の時: $-a + b = 0, a^2 + b^2 = 1$

$\therefore a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\underline{u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(ii) $\lambda = -1$ の時: $a + b = 0, a^2 + b^2 = 1$

$\therefore a = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\underline{u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

(注) $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ の前に位相因子 $e^{i\sigma}$ をつけ

ると

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{と}$$

$$u = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{も 2 解。$$