2-2 固有値と固有関数

$$\boxed{\hat{A}\ u = a\ u}$$

(固有値)

固有値方程式 という

(オペレータ) (固有関数)

1. $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ の固有値と固有関数を求める

($\hat{p}$ は運動量演算子)

$\hat{p}\,\psi(x) = a\,\psi(x)$ が固有値方程式

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{ia}{\hbar}\psi(x) = 0}$$

これは微分方程式ですぐに解ける

$$\underline{\psi(x) = A_0\, e^{\frac{i}{\hbar}ax}}$$

(A_0 は定数)

◉ $\psi(x)$ に何らかの条件をつけない限り

a が何なのかはわからない!!

(例) 境界条件 (周期的境界条件) をつける

$$\boxed{\psi(x) = \psi(x+L)}$$

○ 周期的境界条件：

粒子を箱の中に入れて、
両端の $\psi(x)$ が等しい
と仮定したことに対応する。

自由粒子の場合どうしても必要

$$\psi(x) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar}ax}$$ だから

$$\psi(x) = \psi(x+L)$$ は

$$A_0 e^{\frac{i}{\hbar}ax} = A_0 e^{\frac{i}{\hbar}a(x+L)}$$ となる

すなわち $$\boxed{e^{\frac{i}{\hbar}aL} = 1}$$

よって

$$\boxed{a = \frac{2\pi\hbar}{L} n \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots}$$

となる。 但し A_0 は決まらない。

2. $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有関数

$$\begin{cases} u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{とする.} \\ u^{+} = (a, b) \end{cases}$$

ここで $u^{+}u = 1$ と仮定する

$\downarrow$

$\therefore \underline{a^2 + b^2 = 1}$

・固有値方程式は

$$\sigma_x u = \lambda u$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

ここで a, b が non-zero の解が存在する

$\Updownarrow$

行列式 = 0

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \therefore \underline{\lambda^2 = 1}$$

$$\boxed{\lambda = \pm 1}$$

固有値は ± 1

→ 波動関数 u は ?

(i) $\lambda=1$ の時： $-a+b=0$, $a^2+b^2=1$

よって $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\underline{u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

(ii) $\lambda=-1$ の時： $a+b=0$, $a^2+b^2=1$

よって $a=-b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\underline{u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}$$

(注) $u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ の前に位相因子 $e^{i\delta}$ がつく

従って

$u=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ も

$u=\frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ も 共に解。