4-2 一般の波動関数（調和振動子） 85

調和振動子の波動関数（の状態）：

量子数 $\boxed{n}$ ですべて決まる

$$\begin{cases} E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) \\ u_n(x) = N_n H_n(\alpha x)\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \\ N_n = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

（規格化定数）

● 完全規格直交系：

$u_n(x)$ は完全規格直交系をなしている

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x)\, u_m(x)\, dx = \delta_{mn} \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\, u_n^*(y) = \delta(x-y) \end{cases}$$

● $H_n(\xi)$ ： エルミート多項式という

$\rightarrow$ $\boxed{H_n''(\xi) - 2\xi H_n'(\xi) + 2n H_n(\xi) = 0}$

【母関数】

・ $H_n(\xi)$ は次の母関数により表わされる

$$\boxed{e^{-x^2+2\xi x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(\xi) x^n}$$

母関数という　　　　エルミート多項式

(これを生みだすから!!)

この時：

$$\boxed{H_n(\xi) = (-)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}}$$

(証)
$$e^{-x^2+2\xi x} = e^{-(x-\xi)^2} e^{\xi^2}$$

ここで $f(x) = e^{-(x-\xi)^2}$ と定義すると

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \quad \text{(Taylor展開)}$$

となりる.

ここで
$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} e^{-(x-\xi)^2}$$
$$= (-)^n \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-(x-\xi)^2}$$

(対称性より)

よって
$$f^{(n)}(0) = (-)^n \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} \quad (x=0 \text{ とおく})$$

No.

Date

よって

$$e^{-(x-\xi)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[(-)^n \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}\right] x^n$$

一方 $e^{-x^2+2\xi x} = e^{\xi^2} e^{-(x-\xi)^2}$ であるから

$$= e^{\xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[(-)^n \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}\right] x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(\xi) x^n$$

従って

$$\boxed{H_n(\xi) = (-)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}}$$

が証明された。

この式より

$$\begin{cases} H_n'(\xi) = 2n\, H_{n-1}(\xi) \\ H_{n+1}(\xi) = 2\xi\, H_n(\xi) - 2n\, H_{n-1}(\xi) \end{cases}$$

が導びかれる。

(1) $H_n'(\xi) = 2n H_{n-1}(\xi)$ の証明：

$$e^{-x^2+2\xi x} = \sum \frac{1}{n!} H_n(\xi) x^n$$

ξ で両辺を微分すると

$$\boxed{2x\, e^{-x^2+2\xi x} = \sum \frac{1}{n!} H_n'(\xi)\, x^n} \quad (*)$$

一方：

$$左辺 = 2x \sum_n \frac{1}{n!} H_n(\xi) x^n$$

$$= \sum_n \frac{2}{n!} H_n(\xi) x^{n+1}$$

ここで $n+1 \to n$ と書きかえる（nは集まよいから）

$$左辺 = \sum_n \frac{2}{(n-1)!} H_{n-1}(\xi) x^n$$

$$= \sum \frac{2nH_{n-1}(\xi)}{n!} x^n$$

よって (*) の右辺と上式を比較して

$$\boxed{H_n'(\xi) = 2n\, H_{n-1}(\xi)}$$

が示された

(2) $H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi)$ の証明

$$H_n(\xi) = (-)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$$

を ξ で微分すると

$$H_n'(\xi) = (-)^n \left[2\xi e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2} + e^{\xi^2} \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} e^{-\xi^2} \right]$$

$$= 2\xi H_n(\xi) - H_{n+1}(\xi)$$

一方 $H_n'(\xi) = 2n H_{n-1}(\xi)$ だから

$$2n H_{n-1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - H_{n+1}(\xi)$$

よって

$$\boxed{H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2n H_{n-1}(\xi)}$$

が示された。