

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I$$

ユニタリ変換の時, U はユニタリ変換である。

① 行列の場合:

$$U^\dagger \equiv (U^t)^*$$

成分で書くと $(U^\dagger)_{ij} = U_{ji}^*$

$$U^\dagger U = I \quad \text{を成分で表すと}$$

$$\sum_{j=1}^n (U^\dagger)_{ij} U_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^n U_{ji}^* U_{jk} = \delta_{ik}$$

② ユニタリ変換で基底関数の内積は不変

$$\psi_i' = \sum_{j=1}^n U_{ij} \psi_j, \quad \psi_i'^\dagger = \sum_{j'=1}^n \psi_{j'}^\dagger (U^\dagger)_{j'i}$$

$$\text{したがって} \quad \sum_{i=1}^n \psi_i'^\dagger \psi_i' = \sum_{i,j,j'=1}^n \psi_{j'}^\dagger (U^\dagger)_{j'i} U_{ij} \psi_j$$

$$= \sum_{j,j'=1}^n \psi_{j'}^\dagger \delta_{j'j} \psi_j = \sum_{j=1}^n \psi_j^\dagger \psi_j = \text{不変}$$