

5-2 空間回転の対称性

No. _____
Date _____

14

$$H \ni \omega t = \hat{H} \quad \hat{H} \quad \text{か}$$

$$\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r)} \quad , \quad r = |\mathbf{r}|, \quad \hat{p} = -i\hbar \nabla$$

2.5.2.3 粒子系 6.5.2.3.

$r = |\mathbf{r}|$, $\hat{p}^2$ は スカラー-量

『従って空間回転に対して不変』

① 回転オペレーター

[例] z -軸の回りに θ 回転させるオペレーター

$$\boxed{\hat{R}_z(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{L}_z \theta}} \quad \text{である}$$

2.2.2. $\hat{L}_z$ は角運動量演算子

$$\hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \left(\begin{array}{l} \hat{\mathbf{L}} = \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla \\ \text{の } z \text{ 成分} \end{array} \right) \end{array}$$

$$(3E) \quad \psi(x', y', z') = \hat{R}_z(\theta) \psi(x, y, z)$$

a $\hat{R}_z(\theta) \in \text{ユニタリ}$

$$\text{但し} \quad \begin{cases} x' = \cos \theta \, x + \sin \theta \, y \\ y' = -\sin \theta \, x + \cos \theta \, y \\ z' = z \end{cases}$$

(z -軸) の回りの回転

• $\theta \ll 1$ (微小回転) とする

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad \sin \theta &\approx \theta \\ \cos \theta &\approx 1 \end{aligned} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} x' = x + \theta y \\ y' = y - \theta x \\ z' = z \end{cases}$$

よって

$$\psi(x', y', z') = \psi(x + \theta y, y - \theta x, z)$$

$\theta \ll 1$ より Taylor 展開すると

$$\psi(x', y', z') = \left[1 + \theta \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \dots \right] \psi(x, y, z)$$

$$\text{よって} \quad \hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad \text{より}$$

$$\psi(x', y', z') = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \theta \hat{L}_z + \dots\right) \psi(x, y, z)$$

とある。

この式では θ は微小。

• 有限の θ : $\frac{\theta}{n}$ の回転を n 回実行する

このとき $\frac{\theta}{n} \ll 1$ とある

($n \rightarrow \infty$)

このとき

$$\psi(x', y', z') = \left(1 - \frac{i}{\hbar} \frac{\theta}{n} \hat{L}_z\right)^n \psi(x, y, z)$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$ とある

$$\psi(x', y', z') = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{L}_z} \psi(x, y, z)$$

とある

$$\hat{R}_z(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \hat{L}_z}$$

とある

• $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r)$ のとき

$$\hat{R}_z(0) \hat{H} \hat{R}_z(0) = \hat{H}$$

なる。

よって $\hat{R}_z(0) = 1 - \frac{i}{\hbar} \theta \hat{L}_z$ として
 $(0 \ll 1 \text{ と } \theta \text{ 十分小})$

$$\left(1 - \frac{i}{\hbar} \hat{L}_z \theta\right) \hat{H} \left(1 + \frac{i}{\hbar} \hat{L}_z \theta\right) = \hat{H}$$

よって θ の 1 次までとると

$$\hat{L}_z \hat{H} = \hat{H} \hat{L}_z$$

が成り立つ。

よって $\hat{H}$ と $\hat{L}_z$ は 同時固有関数をもつ

○ 実際: $\hat{H}$ の固有関数は

$$\psi(r) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{の形をしている。}$$

よって

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar m Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

と成り立つ。