

6. 中心力場における運動

No.

Date

6-1 軌径と角度の分離

18

ポテンシャル (6) 題 $\rightarrow$ 1体問題 である



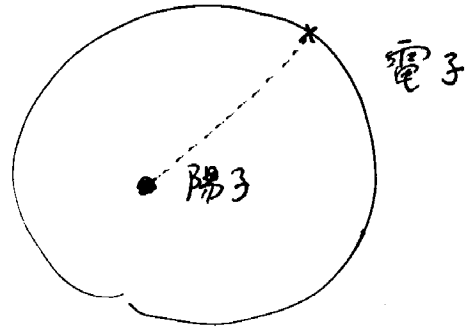
最初から 1体問題 の系である

ポテンシャル を生み出す 系が必要

(但し 自由粒子は 1体問題)

一般に 2体問題が 1体問題に
帰着される

① 水素原子 :



[陽子の座標 : r_1 この質量 m_1
 電子の座標 : r_2 " m_2]

とする.

ポテンシャル (クーロン力) $V(r)$ は

相対座標のみ関数 ($r = |r_1 - r_2|$)

$$V(|r_1 - r_2|)$$

$$\begin{cases}
 \text{相對座標} : & \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\
 \text{重心座標} : & \mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \\
 \text{全質量} : & M = m_1 + m_2 \\
 \text{換算質量} : & m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}
 \end{cases}$$

と定義する。

○ 微分 :

$$\nabla_{\mathbf{r}_1} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{r}_1}$$

∴

$$\nabla_{\mathbf{r}_1} = \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{m_1}{M} \nabla_{\mathbf{R}}$$

同様して

$$\nabla_{\mathbf{r}_2} = -\nabla_{\mathbf{r}} + \frac{m_2}{M} \nabla_{\mathbf{R}}$$

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_1} \hat{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \hat{p}_2^2 + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$$

$$\begin{cases} \hat{p}_1 = -i\hbar \nabla_{\mathbf{r}_1} \\ \hat{p}_2 = -i\hbar \nabla_{\mathbf{r}_2} \end{cases}$$

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$$

相対座標 $\mathbf{r}$ と重心座標 $\mathbf{R}$ と書く

$$\frac{1}{2m_1} \hat{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2} \hat{p}_2^2 = -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{m_1} \nabla_{\mathbf{r}_1}^2 + \frac{1}{m_2} \nabla_{\mathbf{r}_2}^2 \right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2} \left[\frac{1}{m_1} \left(\nabla_{\mathbf{r}} + \frac{m_1}{M} \nabla_{\mathbf{R}} \right)^2 + \frac{1}{m_2} \left(-\nabla_{\mathbf{r}} + \frac{m_2}{M} \nabla_{\mathbf{R}} \right)^2 \right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2$$

2x2x3

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 + V(r)$$

2x2x3

- Schrödinger 方程式 :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V(r) \right] \Phi = E \Phi$$

そこで $\Phi = \phi(R) \psi(r)$ とおく.

(変数分離型の微分方程式)

- 重心座標 については

自由粒子

よって $\phi(R) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}}$ とおくと

Schrödinger 方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

よって $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + E$

となる.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \text{ は 重心の運動エネルギー} \\ E \text{ は } \frac{E_{\text{rel}}}{2} \text{ である} \end{array} \right]$$

● 水素原子 : $\left\{ \begin{array}{l} \text{陽子の質量} \quad M_p = 938 \text{ MeV}/c^2 \\ \text{電子の質量} \quad m_e = 0.51 \text{ MeV}/c^2 \end{array} \right.$

従って 換算質量 m は

$$m = \frac{938 \times 0.51}{938 + 0.51} \approx 0.51 //$$

$$\boxed{m \approx m_e}$$

と近似できる