

7-2 $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ の交換関係式

41

 $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ の間には

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$$

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$$

の交換関係の式が成り立つ。

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \quad \text{と定義すると}$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_x] = [\hat{L}^2, \hat{L}_y] = [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

が示される

$$\begin{aligned} (\text{証明}) \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_x] &= [\hat{L}_y^2, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z^2, \hat{L}_x] \\ &= \hat{L}_y [\hat{L}_y, \hat{L}_x] + [\hat{L}_y, \hat{L}_x] \hat{L}_y + \hat{L}_z [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + [\hat{L}_z, \hat{L}_x] \hat{L}_z \\ &= -i\hbar \hat{L}_y \hat{L}_z - i\hbar \hat{L}_z \hat{L}_y + i\hbar \hat{L}_z \hat{L}_y + i\hbar \hat{L}_y \hat{L}_z = 0 \end{aligned}$$

42

① $\hat{L}^2, \hat{L}_z$ は同時固有関数をもつ。

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0 \quad \text{である。}$$

$$\begin{cases} \hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = \lambda Y_{lm}(\theta, \varphi) \\ \hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \varphi) \end{cases}$$

である $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ が存在する。

② 固有値 λ は交換関係の式を用いて求まる。
(代数的手法)

1. ステップ 1 :

$$\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y \quad \text{と定義すると}$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}] = [\hat{L}_z, \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y] = \pm\hbar \hat{L}_{\pm}$$

よってこの式は $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ に適用できる

$$(\hat{L}_z \hat{L}_{\pm} - \hat{L}_{\pm} \hat{L}_z) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \pm\hbar \hat{L}_{\pm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

つまり

$$\hat{L}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar m Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{E14.12}$$

$$\hat{L}_z (\hat{L}_{\pm} Y_{lm}(\theta, \varphi)) = \hbar (m \pm 1) \hat{L}_{\pm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

つまり

43

すなわち $\frac{[\hat{L}_\pm Y_{lm}(\theta, \varphi)]}{n \text{ の固有値は }} \in L_2 \text{ の固有関数である}$
 $\underline{h(m \pm 1)}$

すなわち

$$\hat{L}_\pm Y_{lm}(\theta, \varphi) \propto Y_{l, m \pm 1}(\theta, \varphi)$$

比例定数は $k_\pm$ と可なり.

$$\boxed{\hat{L}_\pm Y_{lm}(\theta, \varphi) = k_\pm Y_{l, m \pm 1}(\theta, \varphi)} \quad \text{すなわち}$$

2. ステップ 2 : $\hat{L}_z$ の固有値には、上、下限がある。

$$(\text{註}) \quad \hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

$$\therefore \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 \geq 0$$

($\hat{L}^2$ と $\hat{L}_z^2$ はエルミートな 2 重線形)

すなわち

$$\hat{L}^2 \geq \hat{L}_z^2$$

すなわち $\hat{L}_z$ の固有値には
上、下限がある。

最大は l と可なり.

$$\boxed{-l \leq m \leq l}$$

44

3. $\hat{L}_+ Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = \hbar m Y_{\ell, m+1}(\theta, \varphi)$ $m = \ell$

$$\hat{L}_+ Y_{\ell, \ell}(\theta, \varphi) = \hbar Y_{\ell, \ell+1}(\theta, \varphi) = 0$$

($\ell+1$ は存在しない)

$$\therefore \boxed{\hat{L}_+ Y_{\ell, \ell}(\theta, \varphi) = 0}$$

$$\hat{L}^2 - \hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z$$

$$(\hat{L}^2 - \hat{L}_+ \hat{L}_-) Y_{\ell, \ell}(\theta, \varphi) = (\hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z) Y_{\ell, \ell}(\theta, \varphi) = 0$$

$$\therefore \boxed{\hat{L}^2 Y_{\ell, \ell}(\theta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell, \ell}(\theta, \varphi)}$$

よって $\lambda = \hbar^2 \ell(\ell+1)$ と決まる。

【まとめ】

$$\hat{L}^2 Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)$$

$$\hat{L}_z Y_{\ell, m}(\theta, \varphi) = \hbar m Y_{\ell, m}(\theta, \varphi)$$

$$-\ell \leq m \leq \ell$$

$$m \text{ は } (2\ell+1) \text{ 個の値をとる}$$

二つの式より

中心力ポテンシャル $V(r)$ の場合

ハミルトニアンは

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{H} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V(r) \\ \hat{H} \psi(r) &= E \psi(r) \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{\psi(r) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)} \quad \text{と仮定}$$

$$\hat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi) \quad \text{と}$$

Schrodinger の方程式は

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r)$$

$$\boxed{\psi(r) = R(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)}$$

と仮定