

9-1-2 応用例

① Zeeman 効果 (Zeeman)

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \quad (\text{水素型原子のハミルトン}) \\ \hat{H}' = -\mu_B H = -\frac{e\hbar}{2mc} H \sigma_z \quad \left(\begin{array}{l} H=(0,0,H) \\ \text{c.c.} \end{array} \right) \end{array} \right.$$

- 水素型原子 (一様磁場 $H=(0,0,H)$) に
軌道とスピンの分裂が生じる (Zeeman 効果)
- 1 次の摂動エネルギー (基底状態 $1S_{1/2}$ に対して)

$$\Delta E^{(1)} = \langle \psi_{1S_{1/2}}^{\uparrow} | H' | \psi_{1S_{1/2}}^{\uparrow} \rangle$$

$$\text{c.c.} \quad \psi_{1S_{1/2}}^{\uparrow}(u) = R_{1S}(r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \chi_{\uparrow}$$

と可3.

$$\left(\text{例: } \chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

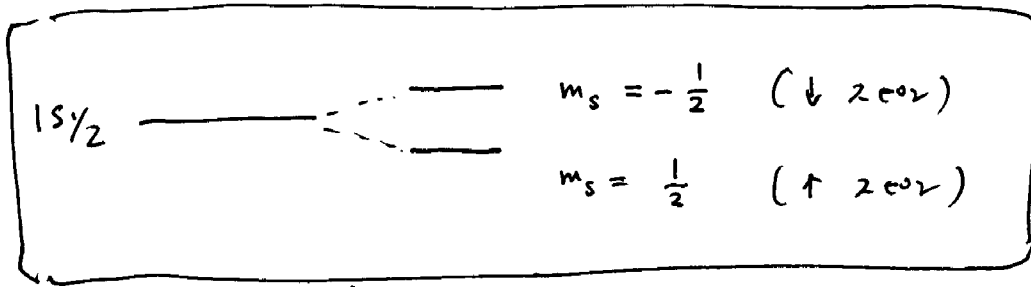
よって Zeeman ↑ の状態に対して

$$\Delta E_{\uparrow}^{(1)} = \langle \psi_{1S_{1/2}}^{\uparrow} | H' | \psi_{1S_{1/2}}^{\uparrow} \rangle$$

$$= \int |R_{1S}(r)|^2 r^2 dr \cdot \chi_{\uparrow}^{\dagger} \left(-\frac{e\hbar}{2mc} H \sigma_z \right) \chi_{\uparrow} = -\frac{e\hbar H}{2mc} //$$

$2\omega_L$ の $\downarrow$ の状態に対しては

$$\underline{\Delta E_{\downarrow}^{(1)} = \frac{e\hbar}{2mc} H} \quad \text{eq. 2.13.}$$



↑
 $\left[\begin{array}{l} \text{Zeeman 効果により} \\ 1s_{1/2} \text{ 状態の縮退がとれた} \end{array} \right]$

② Zeeman 効果 (軌道角運動量)

$$H' = -\frac{e\hbar}{2mc} \mathbf{L} \cdot \mathbf{H} = -\frac{e\hbar}{2mc} H L_z$$

(a) $1s_{1/2}$ 状態に対しては 0

$$\langle 1s_{1/2} | H' | 1s_{1/2} \rangle = 0$$

(b) 2p 状態 に対しては 2つの成分が生じる

$$\psi_{2p}(r) = R_{2p}(r) Y_{1m_l}(\theta, \phi)$$

222.

$$\underline{L_z Y_{l m_l}(\theta, \phi) = \hbar m_l Y_{l m_l}(\theta, \phi)}$$

4.5

1次の摂動を求め $\Delta E^{(1)}$ を

$$\Delta E^{(1)} = -\frac{eH\hbar}{2mc} \cdot m_e \quad (m_l = 0, \pm 1)$$

③ 1次元調和振動子に摂動 H' が加わった場合、

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

(a) $H' = \beta x$ のとき (但し β は定数)

基底状態に対する摂動を求め

(i) 1次の摂動を求め

$n=0$ の波関数(定数)

$$\left(\begin{array}{l} \psi_0(x) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \\ \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}, \quad E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega \end{array} \right)$$

α, ω

$$\Delta E^{(1)} = \langle \psi_0 | H' | \psi_0 \rangle$$

$$= \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \beta x e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} dx = 0$$

$$\therefore \underline{\Delta E^{(1)} = 0}$$

ii) 2次の摂動を計算

$$\Delta E^{(2)} = - \sum_n \frac{|\langle 0 | H' | n \rangle|^2}{E_n - E_0}$$

$$\text{但し } \langle 0 | H' | n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x) \beta x \psi_n(x) dx$$

$n=1$ のみが non-zero

① x は $a, a^\dagger$ を表すと

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger)$$

$$\begin{pmatrix} a | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle \\ a^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle \end{pmatrix}$$

これより x は $\frac{\hbar}{2m\omega}$ を係数に 1 だけ
変化するだけである

$$\psi_1(x) = \left(\frac{\alpha^2}{4\pi}\right)^{\frac{1}{4}} (2\alpha x) e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} \quad \text{よって}$$

$$\langle 0 | H' | 1 \rangle = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\alpha^2}{\pi} \frac{\alpha^2}{4\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha^2 x^2} x (2\alpha x) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\alpha}$$

$$\text{また } E_1 - E_0 = \frac{3}{2} \hbar \omega - \frac{1}{2} \hbar \omega = \hbar \omega \quad \text{よって}$$

$$\Delta E^{(2)} = - \frac{1}{\hbar \omega} \beta^2 \cdot \frac{1}{2\alpha^2} = - \frac{\beta^2}{2m\omega^2} //$$

[厳密解]

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \beta x \\ &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(x + \frac{\beta}{m \omega^2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{2m \omega^2}\end{aligned}$$

よ、 $x' = x + \frac{\beta}{m \omega^2}$ とおくと

$$[\hat{p}, x'] = -i\hbar$$

よ、 $\hat{H}$ の固有値は x' に依らず、

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\beta^2}{2m \omega^2}$$

と表す。

よ、

$$\begin{cases} \Delta E^{(1)} = 0 \\ \Delta E^{(2)} = -\frac{\beta^2}{2m \omega^2} \end{cases}$$

と表す。