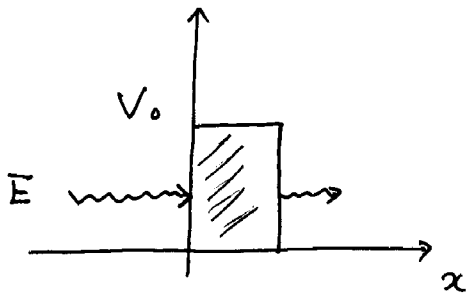


1次元での散乱

← 斥力のポテンシャル



$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ 0 & a < x \end{cases}$$

 $(V_0 > 0)$

粒子のエネルギーを E とし、この粒子が
ポテンシャルの壁にぶつかる現象

 $(E < V_0)$
(とる)

● 古典力学 : 粒子ははね返される

● 量子力学 : 有限の確率で粒子は壁を通りぬける
それ以外の2倍率で粒子ははね返る

① Schrödinger 方程式 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

$$V_0 > 0$$

(注: 束縛状態は存在しない)

散乱の境界条件

1. 入射粒子は左からで散乱あり

$$(正エネルギーは $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$)$$

2. 解法: (a) 領域をわける

(b) 境界で接続

(c) $\left\{ \begin{array}{l} \text{入射波} \\ \text{反射波} \\ \text{透過波} \end{array} \right.$

(i) $x < 0$ (領域 I)

この時 $x < 0$ である $V(x) = 0$

Schrodinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2} = E \psi_2(x)$$

$$E > 0 \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{粒子}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2 \psi_2(x)}{dx^2} + k^2 \psi_2(x) = 0$$

この一般解は

$$\psi_2(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

① 粒子が左から来て、 $x < 0$ 領域の壁で
散乱する。この時の粒子は 自由粒子

$$\psi_0(x) = A e^{ikx} \quad \text{入射波}$$

運動量 p の固有値は $\hbar k > 0$
正の方向に進む (右方向)

- 反射波: ポテンシャルの位置にぶつかって
反射する波がある

$$\psi_R(x) = B e^{-ikx}$$

この時、粒子は左側へ進む

(運動量 $p = -\hbar k$)

$x < 0$ 領域では全波として

$$\psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

となる。

(入射波) (反射波)

(ii) $0 < x < a$ の領域 (II)

Schrodinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{II}(x)}{dx^2} + V_0 \psi_{II}(x) = E \psi_{II}(x)$$

222.. $\kappa \equiv \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$ とおくと

$$\frac{d^2 \psi_{II}(x)}{dx^2} - \kappa^2 \psi_{II}(x) = 0$$

この一般解は

$$\psi_{II}(x) = c_1 e^{\kappa x} + c_2 e^{-\kappa x}$$

(iii) $x > a$ の領域 III

右方向にゆく波のみが存在する。(透過波)

$$\psi_{III}(x) = D e^{ikx}$$

(注: 反射波は存在しない)

・波動関数 ψ と κ の微分係数は

境界 $(I) \text{ と } (II)$ および $(II) \text{ と } (III)$ で接続

(a) $(I) \text{ と } (II)$ の境界 ($x=0$)

$$\begin{cases} \psi_I(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \\ \psi_{II}(x) = C_1 e^{\kappa x} + C_2 e^{-\kappa x} \end{cases}$$

$$x=0 \text{ での接続: } \begin{cases} A + B = C_1 + C_2 \\ ik(A - B) = \kappa(C_1 - C_2) \end{cases}$$

(b) $(II) \text{ と } (III)$ の境界 ($x=a$)

$$\psi_{III}(x) = D e^{ikx}$$

$$x=a \text{ での接続: } C_1 e^{\kappa a} + C_2 e^{-\kappa a} = D e^{ika}$$

$$\kappa(C_1 e^{\kappa a} - C_2 e^{-\kappa a}) = ikD e^{ika}$$

[解法]

123

• 入射波は $\underline{\psi_0(x) = A e^{ikx}}$

• この確率 (73.92) は $|A|^2$ に比例する。
よ、

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{透過確率} : & \frac{|D|^2}{|A|^2} \\ \text{反射確率} : & \frac{|B|^2}{|A|^2} \end{array} \right. \quad \text{である}$$

• 透過確率と反射確率が物理的な

$$\left[\text{観測値} \right] \quad \text{である}$$

以下の計算では

$$\underline{A=1} \quad \text{として行う}$$

$$A=1 \text{ で計算する}$$

(1) $x=0$ の接続条件より

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} \left[A + B + \frac{ik}{\kappa} (A - B) \right] \\ C_2 = \frac{1}{2} \left[A + B - \frac{ik}{\kappa} (A - B) \right] \end{cases}$$

(2) $x=a$ の接続条件より

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} b e^{ika - \kappa a} \left(1 + \frac{ik}{\kappa} \right) \\ C_2 = \frac{1}{2} b e^{ika + \kappa a} \left(1 - \frac{ik}{\kappa} \right) \end{cases}$$

より a の式より C_1, C_2 は 2 つ 1 つ

$$\begin{cases} A + B + \frac{ik}{\kappa} (A - B) = D e^{ika - \kappa a} \left(1 + \frac{ik}{\kappa} \right) \\ A + B - \frac{ik}{\kappa} (A - B) = D e^{ika + \kappa a} \left(1 - \frac{ik}{\kappa} \right) \end{cases}$$

2222

$$X \equiv \frac{1 + \frac{ik}{\kappa}}{1 - \frac{ik}{\kappa}}$$

と定義する。特に $A=1$ のとき

$$\begin{cases} X + B = D X e^{ika - \kappa a} \\ \frac{1}{X} + B = \frac{D}{X} e^{ika + \kappa a} \end{cases}$$

22222

2nd Derivative

$$D = e^{-ika} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 e^{-ka} - e^{ka}} \right)$$

or

• $ka \gg 1$ & $\frac{\hbar^2}{2m} \gg 1$

$$e^{ka} \gg 1$$

2nd Derivative :

$$D = \frac{e^{-ka - ika} (1 - x^2)}{\left(x = \frac{1 + \frac{i\hbar^2}{2mka}}{1 - \frac{i\hbar^2}{2mka}} \right)}$$

• Transmission Coefficient (Probability of Transmission)

$$|D|^2 = e^{-2ka} (1 - x^2)^2$$