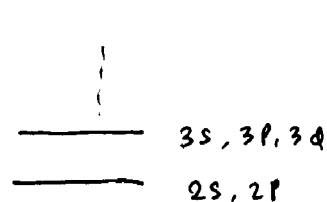


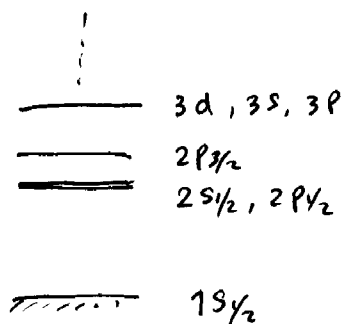
9-6 Dirac 方程式

129

- ① 水素原子の 2 ノット



[Schrodinger
方程式]



[実験]

- ② 電子の状態は 全角運動量 J で指定される

$$J = L + S$$

[J は Dirac の Hamiltonian と交換する]



より量子数になる

[Dirac 方程式の導出]

130

● Einstein の 関係式

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$$

↓

$$E^2 - p^2 c^2 - m^2 c^4 = 0 \quad \text{を 因数分解する}$$

↓

$$(E - c p \alpha - \beta m c^2) (E + c p \alpha + \beta m c^2) = 0$$

 α, β

$$\begin{cases} \alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \\ \beta \end{cases}$$

は 共に 4x4 行列

$$\begin{cases} \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} \\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z : \text{Pauli 行列})$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}$$

• Dirac の方程式

$$\boxed{(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2) \Psi = E \Psi} \quad (\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla)$$

Ψ は 4 成分 : $\underline{\underline{\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}}}$

4 成分の自由度 : $\begin{cases} \text{2 成分の自由度が 2} \\ \text{正負のエネルギーが 2} \end{cases}$

↓ $\text{2 成分の自由度は自然に } c^2 \ll c^2$

• Dirac の Hamiltonian $\hat{H}$

$$\underline{\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2}$$

この場合 :

$$\begin{cases} [\hat{H}, \mathbf{L}] \neq 0 \\ [\hat{H}, \mathbf{S}] \neq 0 \\ [\hat{H}, \mathbf{J}] = 0 \end{cases} \quad \text{ただし}$$
$$(\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S})$$

$$(13) (a) [H, \hat{L}] = -i\hbar c (\alpha \times \hat{p}) \quad \text{E.T.D.}$$

$$\begin{aligned} [H, \hat{L}_k] &= \left[\sum_e c \alpha_e \hat{p}_e + m\beta c^2, \hat{L}_k \right], \quad L_k = (\mathbf{r} \times \hat{p})_k \\ &= c \sum_{e, i, j} [\alpha_e \hat{p}_e, \epsilon_{ijk} \alpha_i \hat{p}_j] \\ &= \sum_{e, i, j} c \alpha_e \underbrace{[\hat{p}_e, \alpha_i]}_{-i\hbar \delta_{ei}} \epsilon_{ijk} \hat{p}_j = - \sum c \alpha_e i\hbar \delta_{ei} \epsilon_{ijk} \hat{p}_j \\ &= -i\hbar c (\alpha \times \hat{p})_k \quad // \end{aligned}$$

$$(b) [H, \hat{S}] = i\hbar c (\alpha \times \hat{p}) \quad \text{E.T.D.}$$

$$\begin{aligned} [H, \hat{S}] &= \frac{\hbar}{2} \left\{ \begin{pmatrix} mc^2 & c\alpha \cdot \hat{p} \\ c\alpha \cdot \hat{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} mc^2 & c\alpha \cdot \hat{p} \\ c\alpha \cdot \hat{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{\hbar c}{2} \begin{pmatrix} 0 & (\alpha \cdot \hat{p})\sigma - \sigma(\alpha \cdot \hat{p}) \\ (\alpha \cdot \hat{p})\sigma - \sigma(\alpha \cdot \hat{p}) & 0 \end{pmatrix} = i\hbar c \alpha \times \hat{p} \end{aligned}$$

$$(c) \text{ zoh } \rightarrow [H, \hat{J}] = [H, \hat{L} + \hat{S}] = 0 //$$

① 電子と電磁場の相互作用

$$H = c \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2 + V(r)$$

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$$

↓
水素原子のスペクトルをよく記述する。

② (b) 問題点: $2s_{1/2}, 2p_{1/2}$ は
Dirac 方程式だけでは記述できない。

