

[特別講義]

No.

Date

9-7 Lamb shifts

134

- 実験: $\left\{ \begin{array}{l} \text{水素原子 } 2P_{1/2} \text{ と } 2S_{1/2} \text{ は 分離} \\ 2S_{1/2} \text{ 以上 12 通り} \end{array} \right.$

Dirac 方程式 だけでは記述できない!!

- 場の量子化: 電磁波の量子化が必要



[その結果を代入する]

- $\hat{H} = \hat{p}^2/2m_0 - Ze^2/r - \frac{e}{m_0} \hat{p} \cdot \hat{A}$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{m_0} \hat{p} \cdot \hat{A}$$

(電子の運動は非相対論的扱い)

- ベクトルポテンシャル $\hat{A}$

$$\hat{A} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\mathbf{k}}}} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \left[c_{\mathbf{k}, \lambda} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + c_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right]$$

ここで

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \quad \text{偏極ベクトル} \\ k_x \equiv \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{4元ベクトル}) \end{array} \right.$$

135

[場の量子化]

$$[c_{k,\lambda}, c_{k',\lambda'}^\dagger] = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'}$$

を仮定する。



$$c_{k,\lambda}, c_{k,\lambda}^\dagger \text{ は } \text{フェルミオン}$$

(場の量子化)

- m_0 は 電子の質量
(但し、理論上のパラメータ)

$$\bullet \quad \hat{H}' = - \frac{e}{m_0} \hat{p} \cdot \hat{A} \quad \text{とおく}$$

ペールポテンシャルによる 2次の効果



2次の摂動論

① 自由粒子の場合

$$\delta E^{(2)} = - \sum_{\lambda} \sum_{k} \sum_{p'} \left(\frac{e}{m_0} \right)^2 \frac{1}{2V\omega_k} \frac{|\langle p' | \mathbf{E} \cdot \mathbf{p} | p \rangle|^2}{E_{p'} + k - E_p}$$

3 $|E_{p'} - E_p| \ll k$ とし、 k が小さいと仮定

この場合

$$\delta E^{(2)} = - \frac{1}{6\pi^2} \wedge \left(\frac{e}{m_0} \right)^2 p^2$$

と表す

($\wedge$ は くりこみ)

• 振動の質量 δm

$$\delta m = \frac{e^2}{3\pi^2} \wedge$$

と表す

$$\delta E^{(2)} = - \frac{p^2}{2m_0^2} \delta m$$

これを $\hat{H}_0$ の $\hat{H}_0$ に加える

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} - \frac{\hat{p}^2}{2m_0^2} \delta m$$

$$\approx \frac{1}{2(m_0 + \delta m)} \hat{p}^2 //$$

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2(m_0 + \delta m)} \hat{p}^2$$

(1) δm の 2 次 (2 次) 近似

222

$$m \equiv m_0 + \delta m$$

と定義する

δm は物理的質量

↓

(観測される電子の質量)

① 1次元空間 $\hat{H}$ は書き換える

($m_0 \rightarrow m$)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{m_0} \hat{p} \cdot \hat{A}$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} + \frac{p^2}{2m^2} \delta m - \frac{e}{m} \hat{p} \cdot \hat{A}$$

2次元空間 $\hat{H}$ は書き換える

m : 電子の質量 (観測値)

[Lamb shifts]

138

水素原子の $2s_{1/2}$ 状態に対して計算する
($2p_{1/2}$ 状態は除外)

$$\begin{aligned}\Delta E_{2s_{1/2}} &= \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \langle 2s_{1/2} | \hat{p}^2 | 2s_{1/2} \rangle \\ &\quad - \sum_l \sum_k \sum_{n,l} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{2V\omega_k} \frac{|\langle n,l | \hat{p} | 2s_{1/2} \rangle|^2}{E_{n,l} + k - E_{2s_{1/2}}} \\ &= \frac{1}{6\pi^2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \sum_{n,l} |\langle n,l | \hat{p} | 2s_{1/2} \rangle|^2 \\ &\quad \times \int_0^\infty dk \left(\frac{E_{n,l} - E_{2s_{1/2}}}{E_{n,l} + k - E_{2s_{1/2}}} \right)\end{aligned}$$

ただし

$$\sum_{n,l} |\langle n,l | \hat{p} | 2s_{1/2} \rangle|^2 = \langle 2s_{1/2} | \hat{p}^2 | 2s_{1/2} \rangle$$

を証明

139

222 1/2 の $E_{n\ell}$ 依存性は $\frac{1}{r}$ 型

$$\begin{aligned} & \sum_{n,\ell} |\langle n\ell | \hat{p} | 2s_{1/2} \rangle|^2 (E_{n\ell} - E_{2s_{1/2}}) \\ &= \frac{1}{2} \langle 2s_{1/2} | [[\hat{p}, \hat{H}_0], \hat{p}] | 2s_{1/2} \rangle \\ &= 2\pi Ze^2 \langle 2s_{1/2} | \delta(r) | 2s_{1/2} \rangle \\ & \quad \left(\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} \right) \end{aligned}$$

222 $\Lambda \approx m$ (電子の質量) c と $\hbar$

$$\Delta E_{2s_{1/2}} \approx 1040 \text{ MHz}$$

$$\Delta E_{2s_{1/2}}^{\text{exp}} \approx 1057.862 \pm 0.020 \text{ MHz}$$

大抵 $\hbar c \approx 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$

(Dirac の Hamiltonian を $\hbar c$ と $m c^2$ に分ける)