No.

Date



## 10-1-2 応用例

### (1) Zeeman 効果 (zeeman)

Zeeman効果を与える摂動項は

$$\boxed{\hat{H}' = -\mu \cdot \mathbb{H} = -\frac{e\hbar H}{2mc}\sigma_z}$$ となる

[但し $\mathbb{H} = (0, 0, H)$ とする]

水素原子のハミルトニアンが

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta - \frac{Ze^2}{r}$$ で与えられる

$$\Delta \equiv \nabla^2$$ (ナブラという)

◎ この時，水素型原子に一様磁場 $\mathbb{H}$ を加えると基底状態 ($1S_{1/2}$) にエネルギー分裂が生じる (Zeeman効果)

◎ 1次の摂動エネルギー $\Delta E^{(1)}$

$$\Delta E^{(1)} = \langle \psi^{\uparrow}_{1S_{1/2}} | \hat{H}' | \psi^{\uparrow}_{1S_{1/2}} \rangle$$

但し $\psi^{\uparrow}_{1S_{1/2}}(r) = R_{1S}(r) \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \chi_{\uparrow}$

但し $\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

この時 スピンが↑の状態には

$$\Delta E_{\uparrow}^{(1)} = \langle \psi_{1S_{1/2}}^{\uparrow} | \hat{H}' | \psi_{1S_{1/2}}^{\uparrow} \rangle$$

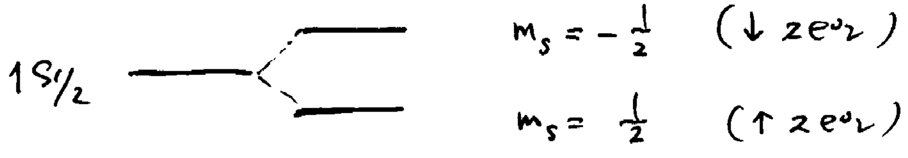
$$= \underbrace{\int \frac{1}{4\pi} |R_{1S}(r)|^2 \cdot d^3r}_{=1} \cdot \langle \chi_{\uparrow}^{*} | -\frac{e\hbar H}{2mc} \sigma_z | \chi_{\uparrow} \rangle$$

$$= -\frac{e\hbar H}{2mc}$$

$$\therefore \boxed{\Delta E_{\uparrow}^{(1)} = -\frac{e\hbar H}{2mc}}$$

同様にして スピンが↓の状態においては

$$\boxed{\Delta E_{\downarrow}^{(1)} = \frac{e\hbar H}{2mc}}$$




Zeeman効果により $1S_{1/2}$ の縮退がとれた.

No.
Date



(2) Zeeman 効果（軌道角運動量）

$$\hat{H}' = -\frac{e\hbar}{2mc}\hat{\mathbb{L}}\cdot\mathbb{H} = -\frac{e\hbar H}{2mc}\hat{L}_z$$

(a) $1s_{1/2}$-状態：

$$\Delta E^{(1)}_{1s_{1/2}} = \langle 1s_{1/2} | \hat{H}' | 1s_{1/2} \rangle = 0$$

(b) $2p$-状態：　　エネルギー分裂が生じる

$$\psi_{2p}(\mathbf{r}) = R_{2p}(r)\cdot Y_{1m_\ell}(\theta,\varphi)$$

$$\hat{L}_z Y_{\ell m_\ell}(\theta,\varphi) = m_\ell \hbar\, Y_{\ell m_\ell}(\theta,\varphi)$$　　より

1次の摂動エネルギー　$\Delta E^{(1)}_{2p}$　は

$$\boxed{\Delta E^{(1)}_{2p} = -\frac{e\hbar H}{2mc}\cdot m_\ell} \qquad (m_\ell = 0, \pm 1)$$

(3) 1次元調和振動子に摂動 $H'$ が加わる

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

(a) $H' = \beta x$ の時：　($\beta$ 定数)

基底状態に対する摂動エネルギー

(i) 1次の摂動エネルギー

$$\Delta E^{(1)} = \langle \psi_0 | H' | \psi_0 \rangle$$

$$\psi_0(x) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

$$\left(\alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}},\ E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega\right)$$

よって

$$\Delta E^{(1)} = \langle \psi_0 | H' | \psi_0 \rangle$$

$$= \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} \beta x \, dx = 0$$

$$\therefore \boxed{\Delta E^{(1)} = 0}$$

(ii) 2次の摂動エネルギー

$$\Delta E^{(2)} = -\sum_n \frac{|\langle 0|H'|n\rangle|^2}{E_n - E_0}$$

（但し $\langle 0|H'|n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0^*(x)\, \beta x\, \psi_n(x)\, dx$）

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+) \quad より$$

$$\left.\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \end{aligned}\right\} \text{だったから}$$

$x$は量子数を1だけかえることができる

よって $\boxed{n=1}$ のみが寄与

$$\therefore \langle 0|H'|1\rangle = \beta \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x)\; x\; \psi_1(x)\, dx$$

$$= \beta \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\alpha^2}{4\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2}\, x\,(2\alpha x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\alpha}$$

また

$$E_1 - E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega \quad よって$$

$$\Delta E^{(2)} = -\frac{1}{\hbar\omega}\beta^2 \cdot \frac{1}{2\alpha^2} = -\frac{\beta^2}{2m\omega^2} \quad //$$

[厳密解]

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \beta x$$

の系は厳密解が知られている.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(x + \frac{\beta}{m\omega^2}\right)^2 - \frac{\beta^2}{2m\omega^2}$$

ここで $x' = x + \frac{\beta}{m\omega^2}$ とおけば

$[\hat{p}, x'] = -i\hbar$ より

$\hat{H}$ の固有値は

$$\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\beta^2}{2m\omega^2}}$$

と求まる.

これより

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta E^{(1)} &= 0 \\ \Delta E^{(2)} &= -\frac{\beta^2}{2m\omega^2} \end{aligned}}$$

である.