10-3 準古典近似 (WKB法)

量子力学 : $\hbar$ を導入した

$$\boxed{[\hat{p}, x] = -i\hbar}$$

$\hbar$ をゼロにする極限

$$[\hbar \to 0]$$

$\Downarrow$

古典力学に対応する

[復習] Hamiltonian-Jacobi の方程式
(力学の話)

作用 : $S = \int_{t_0}^{t} L(q, \dot{q})\, dt$

S を t の関数と考える

この時 :

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = L}$$

一方 ハミルトニアン H の定義は

$$H = p\dot{q} - L(q\dot{q}), \quad \left(\text{但し } p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$$

よって

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = p\dot{q} - H}$$

書き直すと

$$\boxed{dS = p\,dq - H\,dt}$$

一方、微分の定義より

$$\boxed{dS = \frac{\partial S}{\partial q}dq + \frac{\partial S}{\partial t}dt}$$

この2式を比較すると

$$\boxed{\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial q} \\ H &= -\frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned}}$$

が求まる

これが Hamiltonian-Jacobiの式である

$S = S_0(q) - Et$ とすると

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial S_0}{\partial q} \\ H = E \end{cases}$$

$H = \dfrac{p^2}{2m} + V$ より

$$\boxed{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)^2 + V = E}$$

//

【WKB法】

Schrödinger方程式（1次元）

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\,\psi(x) = E\,\psi(x)$$

WKB法は

$$\psi(x) = A\,e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$$

とおいて

$S(x)$ を $\hbar$ で展開する.

$$\boxed{S(x) = S_0(x) + \hbar S_1(x) + \hbar^2 S_2(x) + \cdots}$$

$\psi(x) = A e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}$ を Schrödinger方程式に代入.

$$\begin{cases} \psi'(x) = A\frac{i}{\hbar}S'(x)\,e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} \\ \psi''(x) = A\frac{i}{\hbar}S''(x)\,e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} + A\left(\frac{i}{\hbar}S'(x)\right)^2 e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} \end{cases}$$

よって

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}A\left(\frac{i}{\hbar}S'(x) - \frac{1}{\hbar^2}(S'(x))^2\right)e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} + A\,V(x)\,e^{\frac{i}{\hbar}S(x)} = E A\,e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}\right]$$

これより

$$\boxed{-\frac{i\hbar}{2m}\left(S_0''(x)+\hbar S_1''(x)+\cdots\right)+\frac{1}{2m}\left(S_0'(x)+\hbar S_1'(x)+\cdots\right)^2 = E-V}$$

$\hbar^0$ 次 : $\underline{\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0(x)}{dx}\right)^2 = E-V(x)}$

$\hbar^1$ 次 : $\underline{-\frac{i}{2m}S_0''(x)+\frac{1}{m}S_0'(x)\,S_1'(x)=0}$

$$\Downarrow$$

$$\therefore \boxed{S_1(x)=\frac{i}{2}\ln\sqrt{2m(E-V)}}$$

◎ $\hbar^0$ 次の方程式は

Hamilton - Jacobi の式になっている！

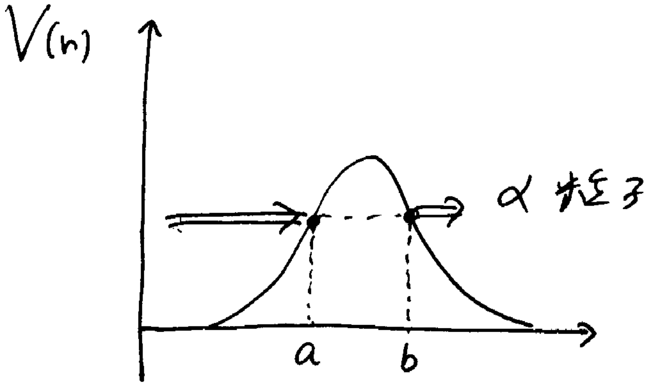
$$\underline{E=\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0(x)}{dx}\right)^2+V}$$

[WKBの応用例]

- トンネル効果の計算

(例) 原子核の α-崩壊

$$A^* \to A + \underset{\substack{\uparrow \\ (\alpha\text{粒子})}}{\alpha}$$



α の波動関数： $\psi_\alpha(r) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar} S_0(r)}$

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad r < a \quad : \quad \psi(r) \sim A e^{ikr} \\ \text{(ii)} \quad a < r < b \quad : \quad \psi(r) \sim B e^{-\frac{1}{\hbar}\int_a^r \sqrt{2m(V-E)}} \\ \text{(iii)} \quad b < r \quad : \quad \psi(r) \sim C e^{ikr} \end{cases}$$

トンネル確率： $\left| \dfrac{C}{A} \right|^2$

・波動関数の接続：

$$\begin{cases} r=a & A e^{ika} = B \\ r=b & B e^{-\frac{1}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m(V-E)}\,dr} = e^{ikb} \end{cases}$$

よって

$$\boxed{\left|\frac{C}{A}\right|^2 = e^{-\frac{2}{\hbar}\int_a^b \sqrt{2m(V-E)}\,dr}}$$

トンネルの確率