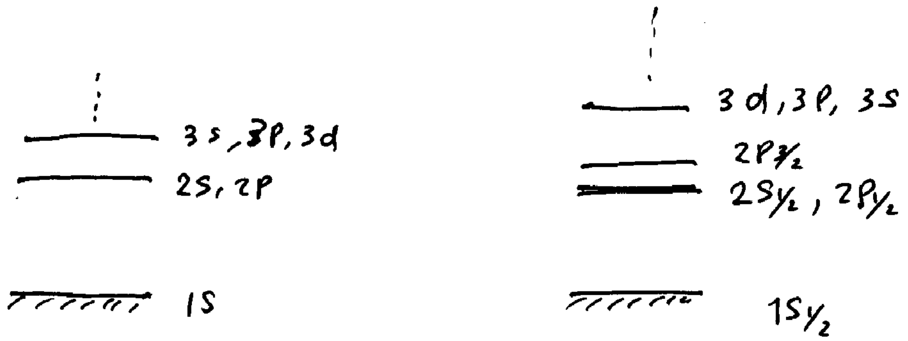
10-4 Dirac 方程式

[水素原子のエネルギー準位]



[Schrödinger 方程式]　　　[実験]

・電子のエネルギーは全角運動量 $\mathbb{J}$ で指定される

$$\boxed{\mathbb{J} = \mathbb{L} + \mathbb{S}}$$

$\mathbb{J}$ は Dirac の Hamiltonian H と交換する.

$$\underline{[\mathbb{J}, H] = 0}$$

[Dirac 方程式の導出]

Einstein の関係式

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{E^2 - p^2c^2 - m^2c^4 = 0}$$

これを因数分解する

$$(E - c\mathbb{p}\cdot\alpha - \beta mc^2)(E + c\mathbb{p}\cdot\alpha + \beta mc^2) = 0$$

ここで

$$\begin{cases} \alpha = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) \\ \beta \end{cases}$$

は 4×4 行列

具体的には

$$\begin{cases} \alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} \\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

(但し $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ は Pauli 行列)

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

[Dirac 方程式]

$$\boxed{(c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2)\Psi = E\Psi}$$

但し $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$，$\Psi$ は4成分をもつ

$$\boxed{\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}}$$

(4つの自由度)
$\left\{\begin{array}{l} \text{スピンの自由度が 2} \\ \text{正負のエネルギーが 2} \end{array}\right.$

◎ Dirac 方程式は スピンが自然に理解できる

◎ Dirac の Hamiltonian $\hat{H}$

$$\boxed{\hat{H} = c\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \beta mc^2}$$

今の場合：
$\left\{\begin{array}{l} [\hat{H}, \mathbb{L}] \neq 0 \\ [\hat{H}, \mathbb{S}] \neq 0 \\ [\hat{H}, \mathbb{J}] = 0 \end{array}\right.$ である。

但し
$(\mathbb{J} = \mathbb{L} + \mathbb{S})$

(証)

(a) $[H, \mathbb{L}] = -i\hbar c(\alpha \times \hat{\mathbb{p}})$ を示す.

$$[H, L_k] = \left[\sum_\ell c\alpha_\ell p_\ell + \beta mc^2, L_k\right]$$

他に $L_k = (\mathbb{r} \times \mathbb{p})_k = \sum_{i,j} \epsilon_{ijk} x_i p_j$

从って

$$[H, L_k] = c\sum_{\ell,i,j} [\alpha_\ell p_\ell, \epsilon_{ijk} x_i p_j]$$

$$= \sum_{\ell ij} c\alpha_\ell [p_\ell, x_i]\epsilon_{ijk} p_j = -\sum c\alpha_\ell i\hbar \delta_{\ell i}\epsilon_{ijk} p_j$$

$$= -i\hbar c \sum \alpha_i p_j \epsilon_{ijk} = -i\hbar c(\alpha \times \mathbb{p})_k$$

(b) $[H, \mathbb{S}] = i\hbar c(\alpha \times \mathbb{p})$ を示す.

$$[H, \mathbb{S}] = \frac{\hbar}{2}\left\{ \begin{pmatrix} mc^2 & c\sigma\mathbb{p} \\ c\sigma\cdot\mathbb{p} & -mc^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} mc^2 & c\sigma\cdot\mathbb{p} \\ c\sigma\cdot\mathbb{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{\hbar c}{2}\begin{pmatrix} 0 & (\sigma\cdot\hat{\mathbb{p}})\sigma - \sigma(\sigma\cdot\mathbb{p}) \\ (\sigma\cdot\mathbb{p})\sigma - \sigma(\sigma\cdot\mathbb{p}) & 0 \end{pmatrix} = i\hbar c\, \alpha \times \mathbb{p}$$

(c) よって $[H, \mathbb{J}] = [H, \mathbb{L} + \mathbb{S}] = 0$ //

[電子と電磁場の相互作用]

$$H = c\alpha\cdot p + \beta mc^2 + V(r)$$

$$\left(V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \right)$$

⇓

水素原子のエネルギー準位とよく合っている

● 問題点： ($2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$)

Dirac 方程式は縮退

[実験] → 分裂している

$2S_{1/2}$ の方が少し上にいる

(Lamb shifts)

⇓

(場の量子化)