10-5 特別講義 (Lamb shifts)

水素原子
$2P_{1/2} - 2S_{1/2}$ は分裂している
$2S_{1/2}$ が上にずる

⇓

場の量子化 : 電磁場ができたり消えたりする (生成・消滅)

• ハミルトニアン H

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m_0} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{m_0}\,p\cdot\hat{A}}$$

ベクトルポテンシャル $\hat{A}$ の量子化

$$\boxed{\hat{A} = \sum_{k}\sum_{\lambda=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}}\,\epsilon(k,\lambda)\left[C_{k,\lambda}e^{-ikx} + C^{+}_{k\lambda}e^{ikx}\right]}$$

$\epsilon(k,\lambda)$ 偏極ベクトル
$kx \equiv \omega t - k\cdot r$ 4元ベクトル

No.

Date

[場の量子化]

$$\boxed{[c_{k\lambda},\ c^{\dagger}_{k'\lambda'}] = \delta_{kk'}\,\delta_{\lambda\lambda'}}$$

と仮定する

$c_{k\lambda}$, $c^{\dagger}_{k\lambda}$ はオペレータ

(場の量子化)

- m_0 は電子の質量

- $\underline{H' = -\frac{e}{m_0} p\cdot\hat{A}}$ とおく

$\Downarrow$

2次の摂動をする

◎ 自由粒子の場合：

$$\delta E^{(2)} = -\sum_{\lambda}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\mathbf{p}'}\left(\frac{e}{m_0}\right)^2 \frac{1}{2V\omega_k}\frac{\left|\langle \mathbf{p}'|\epsilon\cdot\hat{\mathbf{p}}|\mathbf{p}\rangle\right|^2}{E_{\mathbf{p}'}+k-E_{\mathbf{p}}}$$

$|E_{\mathbf{p}'}-E_{\mathbf{p}}| \ll k$ とする。(近似)

この時

$$\boxed{\delta E^{(2)} = -\frac{1}{6\pi^2}\Lambda\left(\frac{e}{m_0}\right)^2 \mathbf{p}^2}$$

と求まる。

(Λは運動量のカットオフ)

• 摂動的質量 δm の導入

$$\underline{\delta m \equiv \frac{e^2}{3\pi^2}\Lambda}$$

とする

$$\delta E^{(2)} = -\frac{\mathbf{p}^2}{2m_0^2}\delta m$$

よって

$$\underline{H_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0} - \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0^2}\delta m \cong \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2(m_0+\delta m)}}$$

とみる。(但し e^2 の摂動項のみ考慮)

$$H_0 = \frac{\hat{p}^2}{2(m_0 + \delta m)}$$ となる

$$\boxed{m \equiv m_0 + \delta m}$$ で 定義する

[m は 観測されるべき 質量]

• ハミルトニアン H を書き直す

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} - \frac{Ze^2}{r} - \frac{e}{m_0}\hat{p}\cdot\hat{A}$$

$$\therefore \boxed{H = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r} + \frac{\hat{p}^2}{2m^2}\delta m - \frac{e}{m}\hat{p}\cdot\hat{A}}$$

これを くりこまれた ハミルトニアン という

No.

Date

[Lamb shifts]

水素原子の $2S_{1/2}$ 状態について

2次の摂動を行う

$$\Delta E_{2S_{1/2}} = \frac{1}{6\pi^2}\Lambda\left(\frac{e}{m}\right)^2 \langle 2S_{1/2}|\hat{p}^2|2S_{1/2}\rangle$$

$$-\sum_{\lambda}\sum_{k}\sum_{n,\ell}\left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{2V\omega_k}\frac{|\langle n\ell|\epsilon\cdot\hat{p}|2S_{1/2}\rangle|^2}{E_{n\ell}+k-E_{2S_{1/2}}}$$

$\therefore$

$$\boxed{\Delta E_{2S_{1/2}} = \frac{1}{6\pi^2}\left(\frac{e}{m}\right)^2\sum_{n,\ell}|\langle n\ell|\hat{p}|2S_{1/2}\rangle|^2 \times\int_0^{\Lambda}dk\left(\frac{E_{n\ell}-E_{2S_{1/2}}}{E_{n\ell}+k-E_{2S_{1/2}}}\right)}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}\Delta E_{2S_{1/2}} \simeq 1040 \quad \mathrm{MHz} \\ \Delta E^{exp}_{2S_{1/2}} \simeq 1057.862 \pm 0.020 \quad \mathrm{MHz}\end{cases}$$