パリティオペレータ $\hat{P}$ を

$$\boxed{\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)}$$

で定義する.

この時, $\hat{P}$ の固有値は ± 1 である

(証) $\hat{P}$ の固有値を α その固有関数を $\phi(x)$ とする. この時

$$\boxed{\hat{P}\phi(x) = \alpha\phi(x)}$$

が成立つ.

この式に左から $\hat{P}$ をかけると

$$\hat{P}^2\phi(x) = \alpha\hat{P}\phi(x) = \alpha^2\phi(x)$$

一方定義式より

$$\hat{P}^2\phi(x) = \hat{P}\phi(-x) = \phi(x)$$

2つの式を比較して

$$\underline{\alpha^2 = 1}$$

よって

$$\boxed{\alpha = \pm 1}$$

を求められた.

[例1] 調和振動子のハミルトニアン

$$\hat{H}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

この時 パリティ変換 $\hat{P}$ に対して

$$\hat{H}'(x) = \hat{P}\hat{H}(x)\hat{P}^{-1} = \hat{H}(-x) = \hat{H}(x)$$

よって $\boxed{\hat{P}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}}$ が示された.

よって $\hat{H}$ と $\hat{P}$ は同時固有関数をもつ

$\hat{P}$ の固有関数は

$$\begin{cases} \psi_+(x) = \psi_+(-x) & (+)\text{ パリティ (対称)} \\ \psi_-(x) = -\psi_-(-x) & (-)\text{ パリティ (反対称)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{P}\psi_+(x) = \psi_+(x) & \text{(対称)} \\ \hat{P}\psi_-(x) = -\psi_-(x) & \text{(反対称)} \end{cases}$$

という

$$\begin{cases} \text{対称} : & \psi_+(x) = \psi_+(-x) \\ \text{反対称} : & \psi_-(x) = -\psi_-(-x) \end{cases}$$

• 調和振動子の波動関数

$$\begin{cases} n = 0, 2, 4 \cdots & \text{対称な波動関数} \\ n = 1, 3, 5, \cdots & \text{反対称な波動関数} \end{cases}$$

調和振動子の波動関数

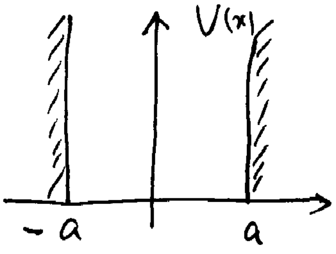
$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha^2}{4^n \pi (n!)^2} \right)^{\frac{1}{4}} H_n(\alpha x)\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

ここで

$$\begin{cases} H_0(\alpha x) = 1 \\ H_1(\alpha x) = 2\alpha x \\ H_2(\alpha x) = 4(\alpha x)^2 - 2 \\ H_3(\alpha x) = 8(\alpha x)^3 - 12\alpha x \\ H_4(\alpha x) = 16(\alpha x)^4 - 48(\alpha x)^2 + 12 \end{cases}$$

となっていてパリティの固有関数である!!

[例2] 無限に高い壁のポテンシャル



$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ \infty & |x| > a \end{cases}$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

このハミルトニアンはパリティ変換に対して不変

$$\boxed{\hat{P}\hat{H}\hat{P}^{-1} = \hat{H}}$$

固有関数はパリティの固有関数でもある。

(証) $|x| < a$ $\quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$

$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ として $\quad \frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0$

よって $\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$

$$\psi(\pm a) = 0 = \pm A\sin ka + B\cos ka$$

これより
$$\boxed{\begin{aligned} \psi_+(x) &= A\cos kx \\ \psi_-(x) &= B\sin kx \end{aligned}}$$
と求まる。

これは $\begin{cases} \hat{P}\psi_+ = \psi_+ \\ \hat{P}\psi_- = -\psi_- \end{cases}$ となっている。