6-1-2 エルミート性

物理での観測量は実数

$\Downarrow$

固有値は観測量

$\Downarrow$

そのオペレータはエルミート

$\Uparrow$

[エルミートオペレータの固有値は実数]

$$\boxed{\hat{A} = \hat{A}^{+}}$$

- エルミートオペレータの固有値は実数である

(証) $\hat{A}\psi = a\psi$ （a が固有値、ψ が固有関数）

このとき $\langle \psi | \hat{A}\psi \rangle = \langle \psi | a\psi \rangle = a \langle \psi | \psi \rangle$

一方 $\hat{A}$ はエルミートだから

$\langle \psi | \hat{A}\psi \rangle = \langle \hat{A}^{+}\psi | \psi \rangle = \langle \hat{A}\psi | \psi \rangle$

$= \langle a\psi | \psi \rangle = a^{*} \langle \psi | \psi \rangle$

よって $\boxed{a = a^{*}}$ a は実数

① 運動量オペレータはエルミートである。

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

(証)

$$\langle \psi | \hat{p}\psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right) dx$$

$$= -i\hbar \underbrace{\Big[\psi^*(x)\psi(x)\Big]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\psi(x)\, dx$$

↑境界条件 $\boxed{\psi(\pm\infty) = 0}$ と仮定する

よって

$$\langle \psi | \hat{p}\psi \rangle = i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi^*}{\partial x}\psi(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^* \psi(x)\, dx$$

$$= \langle \hat{p}\psi | \psi \rangle$$

$$\therefore \quad \underline{\langle \psi | \hat{p}\psi \rangle = \langle \hat{p}\psi | \psi \rangle} \quad //$$

($\hat{p}$ はエルミート)