

$$\boxed{U^\dagger U = 1}$$

任意の時、 U はユニタリ-である

[行列表示]

$$U^\dagger \equiv (U^t)^*$$

$$\text{成分表示} (U^\dagger)_{ij} = U_{ji}^*$$

$U^\dagger U = 1$ を成分表示すると

$$\sum_{j=1}^n (U^\dagger)_{ij} U_{jk} = \delta_{ik}$$

$$\therefore \boxed{\sum_{j=1}^n U_{ji}^* U_{jk} = \delta_{ik}}$$

① ユニタリ- 変換で状態間接の内積は不変

$$(\text{証明}) \quad \psi_i' = \sum_{j=1}^n U_{ij} \psi_j, \quad \psi_i'^{\dagger} = \sum_{j=1}^n \psi_j^{\dagger} (U^\dagger)_{ji}$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \sum_{i=1}^n \psi_i'^{\dagger} \psi_i' &= \sum_{i,j,j'=1}^n \psi_j^{\dagger} (U^\dagger)_{ji} U_{ij} \psi_j \\ &= \sum \psi_j^{\dagger} \delta_{jj} \psi_j = \sum_{j=1}^n \psi_j^{\dagger} \psi_j = \text{不変} \end{aligned}$$