7. 中心力場における運動

7-1 重心と相対運動

ポテンシャル問題 ⇒ 1体問題である

↓

しかし 最初から 1体問題 の系はない

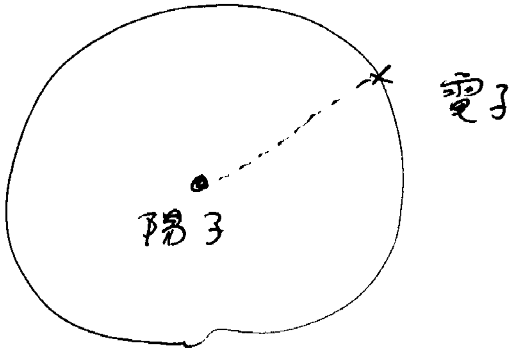
⇑

ポテンシャルを生みだす系が必要

(但し. 自由粒子は1体問題)

【2体問題が1体問題に帰着される】

水素原子 :



陽子の座標 : $\mathbf{r}_1$, 質量 m_1

電子の座標 : $\mathbf{r}_2$, 質量 m_2

⊙ 陽子と電子の相互作用(ポテンシャル)は

クーロン力 : $V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$

$$r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$$

$$\begin{cases} \text{重心座標} : & \mathbb{R} = \dfrac{m_1 \mathbb{r}_1 + m_2 \mathbb{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \text{相対座標} : & \mathbb{r} = \mathbb{r}_1 - \mathbb{r}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{全質量} : & M = m_1 + m_2 \\ \text{換算質量} : & m = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

と定義する.

[微分]

$$\nabla_{\mathbb{r}_1} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbb{r}_1} = \frac{\partial}{\partial \mathbb{r}} \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial \mathbb{r}_1} + \frac{\partial}{\partial \mathbb{R}} \frac{\partial \mathbb{R}}{\partial \mathbb{r}_1}$$

$$\therefore \quad \boxed{\nabla_{\mathbb{r}_1} = \nabla_{\mathbb{r}} + \frac{m_1}{M} \nabla_{\mathbb{R}}}$$

同様に

$$\boxed{\nabla_{\mathbb{r}_2} = - \nabla_{\mathbb{r}} + \frac{m_2}{M} \nabla_{\mathbb{R}}}$$

• 水素原子のハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_1}\hat{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\hat{p}_2^2 + V(|r_1 - r_2|)$$

$$\begin{cases} \hat{p}_1 = -i\hbar\nabla_{r_1} \\ \hat{p}_2 = -i\hbar\nabla_{r_2} \end{cases}$$

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r}$$

この時： 運動エネルギーの部分

$$\frac{1}{2m_1}\hat{p}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\hat{p}_2^2 = -\frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{1}{m_1}\nabla_{r_1}^2 + \frac{1}{m_2}\nabla_{r_2}^2\right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2}\left[\frac{1}{m_1}\left(\nabla_r + \frac{m_1}{M}\nabla_R\right)^2 + \frac{1}{m_2}\left(-\nabla_r + \frac{m_2}{M}\nabla_R\right)^2\right]$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2$$

より

$$\boxed{\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\nabla_r^2 + V(r)}$$

とかける