8. 角運動量とスピン

8-1 軌道角運動量

角運動量の定義 ： $\mathbb{L} = \mathbb{r} \times \hat{p}$

何故必要？

⇒ ポテンシャルが中心力 $V(r)$ だと

$\mathbb{L}$ が保存量になる

- $\mathbb{L} = \mathbb{r} \times \hat{\mathbb{p}} = -i\hbar\, \mathbb{r} \times \nabla$

$$\begin{cases} L_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ L_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{cases}$$

- 極座標だと

$$\begin{cases} L_x = -i\hbar \left(-\sin\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ L_y = -i\hbar \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\ L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{cases}$$

ここで　$L_\pm \equiv L_x \pm i L_y$　を導入

$$\begin{cases} L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_- = \hbar e^{-i\varphi}\left(-\dfrac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_z = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial\varphi} \end{cases}$$

さらに　$\mathbb{L}^2 \equiv L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$　を導入

この時：

$\mathbb{L}^2 = L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z$　と書き直せる

（注：$L_- L_+ = (L_x - iL_y)(L_x + iL_y)$
$= L_x^2 + L_y^2 + i(L_x L_y - L_y L_x)$
$= L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z$　よりあきらか）

【 $\mathbb{L}^2$ を極座標でかく 】

$$\mathbb{L}^2 = L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z$$

$$= \hbar^2 e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$- \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - i\hbar^2\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

これより

$$\mathbb{L}^2 = \hbar^2 \left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + i \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \cot^2\theta \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot^2\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - i\frac{\partial}{\partial\varphi} \right]$$

ここで $\cot^2\theta + 1 = \frac{1}{\sin^2\theta}$ を使うと

$$\mathbb{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]$$

よって

$$\boxed{\mathbb{L}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]}$$

これを使うと

$$\boxed{\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\mathbb{L}^2}$$

とかける