8-2 L_x, L_y, L_z の交換関係式

L_x, L_y, L_z の間には

$$\boxed{\begin{aligned} [L_x, L_y] &= i\hbar L_z \\ [L_y, L_z] &= i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] &= i\hbar L_y \end{aligned}}$$

が成立する

(証)
$$[L_x, L_y] = [y p_z - z p_y, z p_x - x p_z]$$
$$= y[p_z, z]p_x + [z, p_z]p_y x$$
$$= -i\hbar y p_x + i\hbar p_y x = i\hbar L_z \quad //$$

◎ $\mathbb{L}^2$ と L_x, L_y, L_z は交換する

$$[\mathbb{L}^2, L_x] = [\mathbb{L}^2, L_y] = [\mathbb{L}^2, L_z] = 0$$

(証)
$$[\mathbb{L}^2, L_x] = [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x]$$
$$= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y$$
$$+ L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z$$
$$= -i\hbar L_y L_z - i\hbar L_z L_y + i\hbar L_z L_y + i\hbar L_y L_z$$
$$= 0 \quad //$$

- $[\mathbb{L}^2, L_z] = 0 \Rightarrow \mathbb{L}^2$ と L_z は同時固有関数をもつ

$$[\mathbb{L}^2, L_z] = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \mathbb{L}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) = \lambda Y_{lm}(\theta,\varphi) \\ L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) = \hbar m Y_{lm}(\theta,\varphi) \end{cases}$$

- 固有値 λ は交換関係式だけで求まる。(代数的手法)

(Proof)

1. ステップ1 ; $L_\pm = L_x \pm i L_y$ より

$$[L_z, L_\pm] = [L_z, L_x \pm i L_y] = \pm \hbar L_\pm$$

よってこの式を $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ にオペレートすると

$$(L_z L_\pm - L_\pm L_z) Y_{lm}(\theta,\varphi) = \pm \hbar L_\pm$$

ここで $L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) = \hbar m Y_{lm}(\theta,\varphi)$ を用いて

$$\boxed{L_z (L_\pm Y_{lm}(\theta,\varphi)) = \hbar (m \pm 1) L_\pm Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$ が示される

これより $\underline{L_\pm Y_{lm}(\theta,\varphi)}$ も L_z の固有関数

その固有値は $\underline{\hbar (m \pm 1)}$

よって
$$L_\pm Y_{\ell m}(\theta,\varphi) \propto Y_{\ell, m\pm 1}(\theta,\varphi)$$
この比例定数を $k_\pm$ とすると
$$\boxed{L_\pm Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = k_\pm Y_{\ell, m\pm 1}(\theta,\varphi)}$$
である

2. ステップ2：　L_z の固有値には上，下限がある

(証)　$\mathbb{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$

$$\mathbb{L}^2 - L_z^2 = L_x^2 + L_y^2 \geq 0$$

よって　$\underline{\mathbb{L}^2 \geq L_z^2}$　(すなわち L_z の固有値には上，下限が存在する)

最大値を ℓ とすると
$$\boxed{-\ell \leq m \leq \ell}$$

3. ステップ3：
$$L_+ Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = k_+ Y_{\ell, m+1}(\theta,\varphi)$$ より

$m=\ell$ ととって　$L_+ Y_{\ell\ell}(\theta,\varphi) = k_+ Y_{\ell, \ell+1}(\theta,\varphi)$

ところが　m の最大値は ℓ なので
$$\underline{Y_{\ell, \ell+1}(\theta\varphi) = 0}$$

よって
$$\boxed{L_+ Y_{\ell\ell}(\theta,\varphi) = 0}$$

一方 $L_- L_+ = \mathbb{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z$ より

$$L_- L_+ Y_{ll}(\theta,\varphi) = (\mathbb{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z) Y_{ll}(\theta,\varphi) = 0$$

$$\therefore \boxed{\mathbb{L}^2 Y_{ll}(\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{l,l}(\theta,\varphi)}$$

よって $\underline{\lambda = \hbar^2 l(l+1)}$ と求まった //

【まとめ】

$$\begin{cases} \mathbb{L}^2 Y_{lm}(\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta,\varphi) \\ L_z Y_{lm}(\theta,\varphi) = \hbar m Y_{l,m}(\theta,\varphi) \\ \underline{-l \leq m \leq l} \end{cases}$$

→ m は $(2l+1)$ 個の値をとる.

中心力ポテンシャル $V(r)$ では
波動関数 $\psi(r)$ は常に

$$\boxed{\psi(r) = R(r) Y_{lm}(\theta,\varphi)}$$

とおける.