1-4 波動関数

Schrodinger 方程式：　時間依存

$$\boxed{i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}}$$

例 i　自由粒子（potential がない）
1次元の場合.

- 変数分離

$$\psi(x,t) = \chi(t)\phi(x)$$ とおくと

$$i\hbar \frac{d\chi(t)}{dt}\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\chi(t)\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}$$

辺々 $\chi(t)\phi(x)$ で割算すると

$$\underbrace{i\hbar \frac{d\chi(t)}{dt}\cdot\frac{1}{\chi(t)}}_{t\text{ のみの関数}} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\phi(x)}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}}_{x\text{ のみの関数}}$$

これを

$$E = i\hbar\frac{d\chi(t)}{dt}\frac{1}{\chi(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\phi(x)}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2}$$

とおく．（定数だから）

これより

(i) 時間 :

$$i\hbar \frac{d\chi(t)}{dt} = E\,\chi(t)$$

$\downarrow$

よって

$$\chi(t) = \chi_0\, e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$$

(但し, χ_0 は定数)

(ii) 空間 :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = E\phi(x)$$

$\downarrow$

時間によらない

Schrödinger 方程式となる

(自由粒子の場合)

ポテンシャルが入ると

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + U(x)\phi(x) = E\,\phi(x)$$

となる.

◉ 何故"波"というか？

↓ 微分方程式の形とその解が波である

$$\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\phi(x)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} = E\phi(x)$$ の解は

あとで議論する様に

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$$, 但し $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

となる。

すなわち

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx - \frac{i}{\hbar}Et}$$

ここで $E \equiv \hbar\omega$ とおいてみると

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(kx-\omega t)}$$

の形になる。

これは波そのもの!!

(波は $A(x,t) = A_0\sin\left(\omega t - \frac{x}{\lambda}\right)$ と表されている)