1-6 不確定性関係

粒子の位置 x の測定は？

⇓ 期待値が観測量

$$\begin{cases} \langle x \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\, x\, \psi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx \\ \langle x^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \end{cases}$$

議論を簡単にするため

$\boxed{\psi(x) = \psi(-x)}$ と仮定する

この時、$\psi(x)$ は偶関数であるという

このとき $\boxed{\langle x \rangle = 0}$

（証）$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-x) |\psi(-x)|^2 dx$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} x |\psi(x)|^2 dx = -\langle x \rangle$$

$\therefore \boxed{\langle x \rangle = 0}$

運動量（$\hat{p}=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$）の測定は？ ⇒ 期待値

$$
\begin{cases}
\langle \hat{p} \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\,dx \\
\langle \hat{p}^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \psi(x)\,dx
\end{cases}
$$

$\boxed{\langle \hat{p} \rangle = 0}$ （$\psi(x)$ が偶関数だから）

◎ 不確定性関係式

$$
\boxed{\sqrt{\langle x^2 \rangle \cdot \langle \hat{p}^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}}
$$

が成立する。

より一般には

$$
\begin{cases}
\Delta x \equiv \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \\
\Delta p \equiv \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}
\end{cases}
$$

とした時

$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}}$ が不確定性関係式

(注) (1) Δx は何か？

Δx はズレに対応

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle$$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

(平均からのズレの平均)

(2) 不確定性関係式は

(a) $[p, \hat{x}] = -i\hbar$ が成立する限り

Schrödinger 方程式の形で

無関係に成立する

(b) 以下の説明では

$$\begin{cases} \langle x \rangle = 0 \\ \langle \hat{p} \rangle = 0 \end{cases}$$ とする。

【不確定性関係式の証明】

量子化の式 $\boxed{[x, \hat{p}] = i\hbar}$ を使う

今 $$|\hat{p}t + ix|^2 = (\hat{p}t + ix)^\dagger (\hat{p}t + ix)$$

を考える.

複素数の絶対値は 正

$$\therefore \boxed{|\hat{p}t + ix|^2 \geqq 0}$$

よって

$$(\hat{p}t + ix)^\dagger (\hat{p}t + ix) \geqq 0$$

$$(\hat{p}t - ix)(\hat{p}t + ix) \geqq 0$$

[$\hat{p}$, x はエルミートである]

$$\therefore \hat{p}^2 t^2 + i[\hat{p}, x]t + x^2 \geqq 0$$

$$\therefore \boxed{\hat{p}^2 t^2 + \hbar t + x^2 \geqq 0}$$

ここで $\psi(x)$ による期待値をとると

$$\boxed{\langle \hat{p}^2 \rangle t^2 + \hbar t + \langle x^2 \rangle \geqq 0}$$

この式 $\langle \hat{p}^2 \rangle t^2 + \hbar t + \langle x^2 \rangle \geqq 0$ が

任意の実数 t に対して成立する

$\Downarrow$

判別式が負

$$\therefore\ D = \hbar^2 - 4 \langle \hat{x}^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle \leq 0$$

$$\therefore\ \boxed{\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle \hat{p}^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}}$$

が常に成立する。 //

（注： これは基本的には Schwartz の不等式の証明と同じ）

$$|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \geq |(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})|$$

（証明） $(\mathbf{a} t + \mathbf{b})^2 \geq 0$ （t は任意の実数）

$$\therefore\ t^2 \mathbf{a}^2 + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) t + \mathbf{b}^2 \geq 0$$

任意の t に対して成立 $\Rightarrow$ 判別式が負

$$D = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 - |\mathbf{a}|^2 \cdot |\mathbf{b}|^2 \leq 0$$

$$\therefore\ \underline{|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \geq (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})}$$