2. オペレータと固有関数

2-1 オペレータ

オペレータ（演算子）とは何か？

(1) 微分演算子　$\dfrac{d}{dx}$

(2) 行列　A

- 微分の場合：　微分される関数 $f(x)$ が必要

$$\underline{\underline{\frac{d}{dx} f(x)}}$$

- 行列の場合：

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$ の時

状態ベクトル が必要

$$\underline{\phi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}}$$

$$A\phi = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{pmatrix}$$

[固有値方程式]

オペレータ $\hat{A}$ において

$$\boxed{\hat{A}u = au}$$ が成立する時

↓

固有値方程式という

{ ・ u を $\hat{A}$ の固有関数
{ ・ a を固有値　という

$\boxed{a\text{は定数}}$

[例]

1. オペレータ $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

状態関数 $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) $\sigma_z u = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u$

$\therefore \sigma_z u = u$

{ u は σ_z の固有関数
{ 固有値は 1

(b) $\sigma_z v = -v$

{ v は σ_z の固有関数
{ 固有値は -1

2. オペレータ: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

状態関数 $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

この時:

$$\begin{cases} \sigma_x u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v \\ \sigma_x v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u \end{cases}$$

固有関数ではない.

3. オペレータ: $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

・状態関数 $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$ とする.

$$\hat{p}_x \psi(x) = (-i\hbar) \frac{1}{\sqrt{L}} (ik) e^{ikx} = \hbar k \psi(x)$$

よって $\psi(x)$ は $\hat{p}_x$ の固有関数

固有値は $\underline{\underline{\hbar k}}$

・状態関数 $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sin kx$ とする

$$\hat{p}_x \psi(x) = (-i\hbar) \frac{1}{\sqrt{L}} k \cos kx \neq \psi(x)$$

これは固有関数になっていない!