2-2 固有値と固有関数

$\left\{\begin{array}{l}\text{オペレータを } \hat{A} \text{ とする.} \\ \text{その固有関数を } u \text{ とする}\end{array}\right.$

この時：

$$\boxed{\hat{A}\, u = a\, u}$$

$\left\{\begin{array}{l}\text{固有値方程式という} \\ \underline{\underline{a}} \text{ を固有値という（定数）}\end{array}\right.$

[例]

1. $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ の固有値と固有関数を求める

$$\hat{p}\,\psi(x) = a\,\psi(x) \quad \text{（固有値方程式）}$$

$$\therefore \quad \underline{\frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{ia}{\hbar}\psi(x) = 0}$$

これはすぐにとけて

$$\boxed{\psi(x) = A_0\, e^{\frac{i}{\hbar} a x}}$$

となる. A_0 定数.

[境界条件] をつける

$$\underline{\psi(x) = \psi(x+L)} \quad \text{（周期境界条件）}$$

この時，$\psi(x) = A_0 e^{\frac{i}{\hbar} a x}$ より

$$\psi(x) = \psi(x+L) \Longrightarrow \underline{A_0 e^{\frac{i}{\hbar} a x} = A_0 e^{\frac{i}{\hbar}(x+L) a}}$$

$$\therefore \boxed{e^{\frac{i}{\hbar} a L} = 1}$$ よって

$$\underline{\underline{a = \frac{2\pi\hbar}{L} n}} \quad n = 0, \pm 1, \cdots$$

が固有値である

2. $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値と固有関数を求める

固有関数を $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とおく

ここで $\underline{u^{+} u = a^2 + b^2 = 1}$ とする
(規格化)

固有値方程式は

$$\sigma_x u = \lambda u \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\therefore \underline{\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0}$$

この式が a, b が non-zero の解をもつには

行列式 $= 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \boxed{\lambda^2 = 1}$

固有値 λ は $\boxed{\lambda = \pm 1}$

固有関数 u は ?

(i) $\lambda = 1$ の時 : $-a+b=0$, $a^2+b^2=1$ より

$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ が1つの解

$$\therefore \quad \underline{u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

(ii) $\lambda = -1$ の時 : $a+b=0$, $a^2+b^2=1$

よって $a = -b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \quad \underline{u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

(注意) $u = \frac{e^{i\delta}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が一般の解

ここで $e^{i\delta}$ は位相因子で任意定数

しかし物理には影響しない!!