4-3 生成・消滅演算子

調和振動子に有効 $\Longrightarrow$ 将来場の理論でよく使うことになる

[生成 a^+, 消滅 a 演算の導入]

$$
\begin{cases}
a^+ = \sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\, x - \dfrac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, \hat{p} & \text{(生成演算子)} \\
a = \sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\, x + \dfrac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\, \hat{p} & \text{(消滅演算子)}
\end{cases}
$$

と定義する

ここで $[x, \hat{p}] = i\hbar$

◎ 交換関係式 : $\boxed{[a, a^+] = 1}$

(証) $[a, a^+] \equiv aa^+ - a^+a$

$$= \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\, x + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}, \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\hat{p}\right]$$

$$= \frac{(-i)}{2\hbar}[x, \hat{p}] + \frac{i}{2\hbar}[\hat{p}, x] = 1$$

//

この時

$$\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \hbar\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)}$$

となる。 (証明は略)

【代数的手法】

$[a, a^+] = 1$ を用いて、調和振動子のハミルトニアンの

$\begin{pmatrix} \text{固有値} \\ \text{固有関数} \end{pmatrix}$ が求められる。

↓

しかも解析的であり計算は簡単。

$\boxed{\text{以下のステップにより求める}}$

① $\boxed{\hat{N} \equiv a^+ a}$ を定義する。

<u>数演算子</u> という

この時

$$\boxed{\begin{aligned}[\hat{N}, a] &= -a \\ [\hat{N}, a^+] &= a^+\end{aligned}}$$

が成立つ。

計算は簡単。但し次の恒等式を使う

$$\boxed{[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]}$$

この式の証明も簡単。

しかし覚える事!!

② $\hat{N}$ の固有関数を ϕ_n とする.
その固有値を n

$$\boxed{\hat{N}\phi_n = n\phi_n}$$

この時 $\hat{N}a - a\hat{N} = -a$ であったから

$$(\hat{N}a - a\hat{N})\phi_n = -a\phi_n$$

ここで $\hat{N}\phi_n = n\phi_n$ を使うと

$$\boxed{\hat{N}\,\underline{\underline{a\phi_n}} = (n-1)\,\underline{\underline{a\phi_n}}}$$

が示せる

この式は $\boxed{a\phi_n}$ が $\hat{N}$ の固有関数で
その固有値は $\boxed{n-1}$
であることを示している.

$$\begin{cases} \hat{N}\phi_{n-1} = (n-1)\phi_{n-1} \\ \hat{N}(a\phi_n) = (n-1)(a\phi_n) \end{cases}$$

を比較すると

$$\boxed{a\phi_n \propto \phi_{n-1}}$$

であることがわかる.

同様に

$$\hat{N}a^+ - a^+\hat{N} = a^+ \quad より$$

$$\boxed{\hat{N}\,\underline{\underline{a^+\phi_n}} = (n+1)\,\underline{\underline{a^+\phi_n}}}$$ が示される

$\Downarrow$ よって

$$\underline{a^+\phi_n \propto \phi_{n+1}}$$

まとめると

$$\boxed{\begin{aligned} a\phi_n &= k_-\,\phi_{n-1} \\ a^+\phi_n &= k_+\,\phi_{n+1} \end{aligned}}$$

但し

k_-, k_+ は定数

$\Downarrow$

a は 量子数 n を 1 減らす演算子
a^+ は 量子数 n を 1 増やすオペレータ

(注： $|k_-|^2\langle\phi_{n-1}|\phi_{n-1}\rangle = |k_-|^2 = \langle a\phi_n|a\phi_n\rangle$

$= \langle\phi_n|a^+a|\phi_n\rangle = \langle\phi_n|\hat{N}|\phi_n\rangle = n$

よって $\boxed{k_- = \sqrt{n}}$, 同様に $\boxed{k_+ = \sqrt{n+1}}$)

③ $\hat{N}$ の固有値 n に対する制限

$\boxed{\hat{N}\phi_n = n\phi_n}$ において

【n が正かゼロの整数】

であることを示す

(証)

$$n = \langle \phi_n | \hat{N} | \phi_n \rangle = \langle \phi_n | a^+ a | \phi_n \rangle$$

$$= \langle a\phi_n | a\phi_n \rangle = |a\phi_n|^2 \geq 0$$

$\therefore$ n の最小値は $\underline{n=0}$

よって $\boxed{n \geq 0}$

• $n=0$ の固有関数 ϕ_0

$a\phi_n = \sqrt{n}\,\phi_{n-1}$ が示されているので

$a\phi_0 = 0$ $\quad a^+ a\phi_0 = 0$

よって $\boxed{\hat{N}\phi_0 = 0}$

これより、ϕ_0 は $n=0$ の固有関数である

【nが整数】

$n=1$ の場合

$$\hat{N}\, a^{+}\phi_n = (n+1)\, a^{+}\phi_n$$ において

$n=0$ を代入すると

$$\boxed{\hat{N}\, a^{+}\phi_0 = a^{+}\phi_0}$$

よって $(a^{+}\phi_0)$ の固有値は $\underline{\underline{n=1}}$.

これより

$(a^{+})^n \phi_0$ の固有値は

n（整数）となる.

すなわち n の値は

$(n=0, 1, 2, \cdots)$ である.

④ ハミルトニアン

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

をa, a†であらわす

$$\boxed{a^\dagger a = \frac{m\omega}{2\hbar}x^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega}\hat{p}^2 - \frac{1}{2}}$$

が示される。

よって

$$\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)}$$

となる

$\hat{N} = a^\dagger a$ より

$$\boxed{\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)}$$ とも書ける。

この時

$$\hat{H}\phi_n = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)\phi_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\phi_n = E_n\phi_n$$

よって $\boxed{E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}$

$(n = 0, 1, 2, \cdots)$

と求められる。