5-3 連続方程式（カレント保存則）

$$\begin{cases} 密度 & \rho(\mathbf{r},t) \\ カレント & \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \end{cases}$$ とする時

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0}$$

を $\boxed{\text{連続方程式}}$ という（カレント保存則ともいう）

（この式は常に成立しているべきである
それは保存される粒子の保存則を表わしている）

Schrödinger 方程式は連続方程式をみたす

（証）
$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) + U\psi(\mathbf{r},t)$$

この複素共役をとると

$$-i\hbar\frac{\partial\psi^*(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi^*(\mathbf{r},t) + U\psi^*(\mathbf{r},t)$$

ここで $i\hbar\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\psi\right)$ を計算する

$$i\hbar\left(\psi^*(r,t)\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t}+\frac{\partial\psi^*(r,t)}{\partial t}\psi(r,t)\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2\psi(r,t)\right)\psi^*(r,t)+\psi^*(r,t)U\psi(r,t)$$

$$+\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla^2\psi^*(r,t)\right)\psi(r,t)-\psi^*(r,t)U\psi(r,t)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\left[\psi^*(r,t)\left(\nabla\psi(r,t)\right)-\left(\nabla\psi^*(r,t)\right)\psi(r,t)\right]$$

$$\therefore\ \boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^*(r,t)\psi(r,t)\right)=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla\left[\psi^*(r,t)\left(\nabla\psi(r,t)\right)-\left(\nabla\psi^*(r,t)\right)\psi(r,t)\right]}$$

ここで
$$\begin{cases}\rho(r,t)\equiv\psi^*(r,t)\psi(r,t)\\ j(r,t)\equiv\frac{\hbar}{2mi}\left[\psi^*(r,t)\left(\nabla\psi(r,t)\right)-\left(\nabla\psi^*(r,t)\right)\psi(r,t)\right]\end{cases}$$

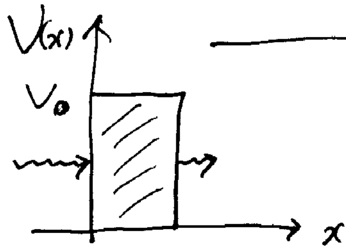
と定義すると

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot j=0}$$

が成立つ。

【1次元散乱の場合】

$$j_x = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*(x,t)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial\psi^*(x,t)}{\partial t}\psi(x,t)\right)$$



(a) 入射波 : $\psi_0(x) = A e^{ikx}$ であった

よって $\hat{j}_x = \frac{\hbar}{2mi}\left[A^* e^{-ikx} (ik) e^{ikx} - A^*(-ik) e^{-ikx} A e^{ikx}\right]$

$\therefore \hat{j}_x = \frac{\hbar}{2mi}|A|^2 2ik = \frac{\hbar k}{m}|A|^2$

入射カレントは $\boxed{\hat{j}_x = \frac{\hbar k}{m}|A|^2}$

(b) $0 < x < a$ の範囲 :

$\psi_{\mathrm{II}}(x)$ は実数. よって

$\boxed{\hat{j}_x = 0}$

(C) $x > a$: 透過波

$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = D e^{ikx}$$

$$\boxed{\hat{j}_x = \frac{\hbar k}{m}|D|^2}$$

＞よって

透過確率 P は

$$\underline{P} = \frac{\hat{j}_x\ (\text{透過波のカレント})}{\hat{j}_x\ (\text{入射波のカレント})} = \frac{|D|^2}{|A|^2}$$

となる.